

ПЕРВЫЕ ШАГИ В ИССЛЕДОВАНИИ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ОБЪЕМНЫХ ЛАЗЕРОВ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

С. Н. Сытова

Использование открытой учеными НИИ ЯП закономерности возрастания инкремента неустойчивости пучка частиц, пролетающего через пространственно-периодическую мишень, от числа волн, возбуждаемых в решетке, в условиях дифракции Брэгга легло в основу создания принципиально новых генераторов электромагнитного излучения – объемных лазеров на свободных электронах (ОЛСЭ). Принципы и теоретические основы функционирования ОЛСЭ были заложены в работах [1], [2] как основа создания рентгеновского лазера и продолжены в [3–8]. Первое экспериментальное наблюдение генерации ОЛСЭ в миллиметровом диапазоне было проведено в НИИ ЯП БГУ в 2001 г. [9–10]. Подтверждено, что с использованием объемной распределенной обратной связи (ОРОС) могут работать не только ОЛСЭ, но и лампы обратной волны (ЛОВ), лампы бегущей волны (ЛБВ) и др. типы электромагнитных усилителей и генераторов. В 2004 г. в НИИ ЯП создана ЛОВ и ОЛСЭ с сеточным резонатором, работающие в сантиметровом диапазоне длин волн [11]. Такого рода генераторы в различных диапазонах необходимы для создания нового поколения ускорителей элементарных частиц, передачи электромагнитной энергии на большие расстояния, нагрева термоядерной плазмы, высокостабильных передатчиков для систем связи в СВЧ-диапазоне и т. д.

Отличительной особенностью ОЛСЭ является использование в качестве объемных резонаторов одно-, двух- и трехмерных дифракционных решеток, обеспечивающих объемную распределенную обратную связь и, как следствие, возможность плавной перестройки частоты в широком диапазоне частот, получения высокой мощности излучения и генерации излучения одновременно на нескольких частотах. Двух- или трехмерные дифракционные решетки позволяют распределить взаимодействие по большому объему и снизить ограничения на мощность в резонаторе, что дает возможность получать на многие порядки большие мощности излучения благодаря отсутствию электрических пробоев по сравнению с другими системами, например, лазерами на свободных электронах (ЛСЭ).

Линейный режим работы ОЛСЭ изучен достаточно хорошо [3–7], но он быстро сменяется нелинейной стадией, на которой происходит основная генерация излучения. Математические модели, описывающие эту стадию работы, представляют собой системы многомерных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Очевидно, что нелинейный режим работы может быть исследован только с использованием численных методов, поскольку аналитически получить решения таких систем уравнений не представляется возможным.

Проведенное математическое моделирование нелинейной стадии работ ОЛСЭ [12–19] подтвердило все основные физические закономерности и прин-

ципы работы ОЛСЭ, в частности, радикальное изменение пороговых условий генерации ОЛСЭ, предсказанные в работах [1, 2]. В ходе численных экспериментов были исследованы:

- пороги генерации по плотности тока пучка, длине мишени, поглощению мишени, факторам асимметрии дифракции для двух- и трехволновых ОЛСЭ;
- ширина режима усиления по плотности тока пучка для двух- и трехволновых ОЛСЭ включая геометрию Лауэ;
- режим SASE (self-amplified stimulated emission) в геометрии Лауэ и Лауэ – Лауэ;
- электродинамическая картина в геометрии Брэгга с внешними зеркалами для различных коэффициентов отражения;
- режим генерации в геометрии Лауэ с внешними зеркалами;
- различные режимы в области вырождения корней для трехволновых геометрий Брэгг – Брэгг и Брэгг – Лауэ в зависимости от параметра отстройки от точного выполнения черенковского условия, системных параметров и факторов асимметрии дифракции.

Показано, что существует оптимальный набор параметров для эффективной генерации излучения в каждом из вышеперечисленных случаев.

При моделировании ОЛСЭ мы столкнулись с хаотическим характером нелинейных режимов работы ОЛСЭ [13–19]. Их исследование очень важно, поскольку изменение управляющих параметров ведет через бифуркации к изменению режимов работы ОЛСЭ. В работах [14–16] продемонстрирован переход с ростом тока от стадии стационарного нелинейного насыщения к колебательной динамике с последовательным удвоением периода и далее к хаотическому поведению. В работах [17–19] приведены карты динамических режимов осцилляций ОЛСЭ на параметрических плоскостях: плотность тока – фактор асимметрии, плотность тока – отклонение от условия синхронизма, плотность тока – длина резонатора.

Данная работа посвящена дальнейшему исследованию хаотической динамики ОЛСЭ. Проведено сравнение работы ОЛСЭ в режиме усиления и режиме генерации при прочих равных условиях, а также чувствительность решений к малым возмущениям начальных данных, что является хорошей верификацией используемых численных алгоритмов и программных средств. Получены карты динамических режимов перехода к хаосу в ОЛСЭ в зависимости от изменения плотности тока и диэлектрической проницаемости резонатора, а также одного из системных параметров.

1. Физическая и математическая модели ОЛСЭ

Резонатор установки ОЛСЭ-10 [9] был сформирован двумя дифракционными решетками с различными периодами и двумя гладкими боковыми стенками. Взаимодействие первой дифракционной решетки (возбуждающей) с электронным пучком генерирует излучение Смит – Парсела. Вторая (резонансная) решетка обеспечивает распределенную обратную связь между полем и электронным пучком посредством динамической дифракции Брэгга. Конструкция

резонатора позволяет изменять его параметры в течение эксперимента (вращать и изменять расстояние между дифракционными решетками и электронным пучком). Это обеспечивает возможность настройки условий двухволновой дифракции.

Электродинамические свойства объемного резонатора [11], который сформирован периодической структурой, построенной из металлических нитей в прямоугольном волноводе, зависят от условий дифракции. В этом случае возникает эффект аномальной передачи электромагнитных волн подобно эффекту Бормана, хорошо известному из динамической теории рентгеновской дифракции [2]. Вторая (резонансная) решетка обеспечивает распределенную обратную связь между излучением и электронным пучком посредством динамической брэгговской дифракции.

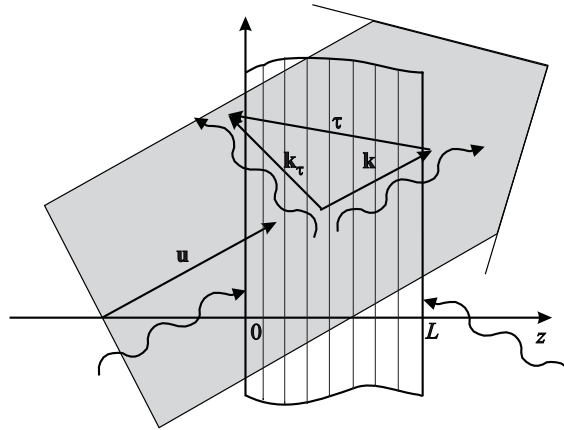


Рис. 1. Объемная схема ОЛСЭ в геометрии Брэгга

Обе эти схемы ОЛСЭ могут быть сведены к следующей простой модели акуратным определением диэлектрической проницаемости среды. На рис. 1 изображена объемная схема двухволнового ОЛСЭ в геометрии Брэгга. Электронный пучок со скоростью u «падает» под некоторым углом на полубесконечную трехмерную пространственно-периодическую мишень толщиной L . Электроны пучка в мишени начинают испускать спонтанное излучение, которое при одновременном выполнении условий дифракции [20]

$$2\mathbf{k}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^2 \approx 0$$

и условия синхронизма – условия Вавилова – Черенкова:

$$\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

преобразуется в коллективное квазичеренковское излучение с частотой ω и волновыми векторами \mathbf{k} и $\mathbf{k}_\tau = \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – вектор обратной решетки мишени. Таким образом, реализуется т. н. режим генератора (осциллятора) в ОЛСЭ. При наличии падающих на мишень внешних электромагнитных волн с волновыми векторами \mathbf{k} и (или) \mathbf{k}_τ может реализоваться режим усиления.

В геометрии Брэгга могут быть реализованы несколько различных режимов работы: 1) величина тока меньше критической и коллективное излучение отсутствует; 2) при достижении критической величины тока становится возможен

режим усиления электронным пучком внешних падающих электромагнитных волн; 3) при дальнейшем увеличении тока и превышении им порогового значения j_{th} реализуется режим генерации.

Уравнения, описывающие нелинейную стадию работы ОЛСЭ, получаются из уравнений Максвелла в приближении медленно меняющихся амплитуд:

$$\Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{j}_b}{\partial t},$$

где \mathbf{E} – напряженность электрического поля, \mathbf{j}_b – плотность тока электронного пучка.

В случае двухволновой дифракции решение ищется в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} (E e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + E_\tau e^{i(\mathbf{k}_\tau \mathbf{r} - \omega t)}),$$

$$\mathbf{j}_b = \mathbf{e} j e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)},$$

где i – мнимая единица, \mathbf{e} – вектор поляризации [20].

Пучок моделируется усреднением по фазам влета электронов в область взаимодействия [21]. Этот метод хорошо известен и широко применяется для расчета ЛБВ, ЛОВ, ЛСЭ и других электронных приборов. Как было показано в наших исследованиях, этот метод также хорошо работает при моделировании динамики пучка в ОЛСЭ [14]. Более того, поскольку уравнение для пучка имеет более сложный вид, чем обычно используемый в литературе [25], [28], это позволило учесть тонкие эффекты, связанные со взаимодействием пучка и электромагнитного поля в условиях ОРОС. Итак, система, моделирующая двухволновой ОЛСЭ, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \gamma c \frac{\partial E}{\partial z} + 0.5i\omega l E - 0.5i\omega \chi_\tau E_\tau = F(j), \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_\tau}{\partial t} + \gamma_1 c \frac{\partial E_\tau}{\partial z} - 0.5i\omega \chi_{-\tau} E + 0.5i\omega l_1 E_\tau = 0,$$

$$F(j) = 2\pi j \Phi \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - p}{8\pi^2} (\exp(-i\Theta(t, z, p)) + \exp(-i\Theta(t, z, -p))) dp, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 \Theta(t, z, p)}{dz^2} = \frac{e\Phi}{m\gamma^3 \omega^2} \left(k - \frac{d\Theta(t, z, p)}{dz} \right)^3 \operatorname{Re}(E(t - z/u, z) \exp(i\Theta(t, z, p))), \quad (4)$$

$$\Theta(t, 0, p) = p, \quad \frac{d\Theta(t, 0, p)}{dz} = k_z - \omega/u, \quad (5)$$

$$E|_{z=0} = E_0, \quad E_\tau|_{z=L} = E_{\tau 0}.$$

где $\gamma_{0,1}$ – направляющие косинусы, $\Phi = \sqrt{l_0 + \chi_0 - 1/(u/c\gamma)^2}$, $\beta_1 = \gamma_0 / \gamma_1$ – фактор асимметрии, $l = l_0 + \delta$, δ – отклонение от точного выполнения условия Черенкова, γ – Лоренц-фактор пучка, $\epsilon_0 = 1 + \chi_0$ – диэлектрическая проницаемость

резонатора, $\chi_0, \chi_{\pm\tau}$ – коэффициенты разложения диэлектрической восприимчивости резонатора в ряд по векторам обратной решетки. Функция $\Theta(t, z, p)$ описывает фазу электронов относительно электромагнитной волны.

Системные параметры l_0 и l_1 имеют вид

$$l_0 = \frac{\mathbf{k}^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0}{\omega^2}, \quad l_1 = \frac{\mathbf{k}_\tau^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0}{\omega^2}.$$

Дисперсионное уравнение, соответствующее двухволновой системе (2), записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} l_0 & -\chi_\tau \\ -\chi_{-\tau} & l_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad l_0 l_1 - \chi_\tau \chi_{-\tau} = 0.$$

При задании системного параметра l_0 параметр l_1 определяется из данного дисперсионного уравнения.

Необходимые численные методы для решения системы (2) – (5) были разработаны в [12–14]. Создан комплекс программ VOLC для моделирования ОЛСЭ [16] – «инструмент» для моделирования работы экспериментальной физической установки ОЛСЭ, создаваемой в НИИ ЯП.

2. Хаос в ОЛСЭ

Хаотическая динамика – естественная тенденция широкого класса систем к переходу в состояния, в которых обнаруживается как детерминированное поведение, так и непредсказуемость. Хорошо известны примеры хаотической динамики, например, турбулентность в жидкости, газе и плазме, хаос в биологических и химических системах и т. д. [22]. Известно, что в одно- и двумерных системах существуют только устойчивые состояния равновесия и периодические движения. Только в гладкой дифференцируемой динамической системе с числом степеней свободы большим 2 возможна хаотизация движений. Система, описывающая ОЛСЭ и рассматриваемая в настоящей работе, именно такова.

Бифуркация – качественное изменение поведения динамической системы, ее перестройка, происходящая при переходе управляющего параметра μ через некоторое критическое бифуркационное значение μ_0 – точку бифуркации. В этой точке у системы появляется «выбор» из нескольких возможных моделей поведения, в котором присутствует элемент случайности. Знание основных точек бифуркаций позволяет существенно облегчить исследование реальных систем, в частности предсказать характер новых движений, возникающих в момент перехода системы в качественно другое состояние, оценить их устойчивость и область существования.

Изучение хаотического поведения ЛСЭ занимает немало места в современных исследованиях [23–27], в частности, известны параметризация нелинейных и хаотических колебаний ЛСЭ [23], [27]. В работе [27] было показано, что для ЛСЭ существуют следующие возможные сценарии перехода к хаосу: удвоение периода, квазипериодичность и перемежаемость. Квазипериодичность связана с бифуркациями Хопфа, которые вводят новую частоту в систему. Перемежаемость связана с бифуркациями седловых точек, т. е. столкновением устойчивой

и неустойчивой точек, которые затем исчезают. Здесь после хаоса может появиться вновь регулярное движение.

Аналитическое исследование хаоса в системе (2) – (5) представляется невозможным из-за ее сильной нелинейности. Кроме того, большое количество внешних управляющих параметров, таких как, например, ток пучка, длина системы, направляющие косинусы ОРОС, поглощение мишени, факторы асимметрии дифракции, параметры отстройки, системные параметры l_i и т. д. многократно увеличивает объем работы. Прохождение электронного пучка через пространственно-периодическую мишень в ОЛСЭ ведет к возникновению разнообразных особенностей динамики генерации, которые происходят из-за нелокальной природы взаимодействия между электронным пучком и электромагнитным полем в условиях ОРОС. Так как ОЛСЭ – нелинейная динамическая система, она характеризуется различными режимами работы, а именно – устойчивое состояние, периодичность, квазипериодичность и хаос.

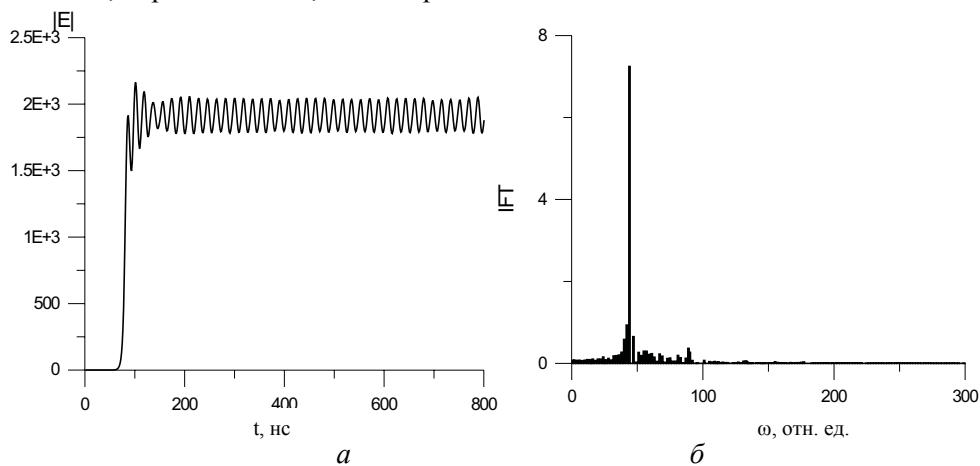


Рис. 2. Периодический режим (а) и его энергетический спектр (б)

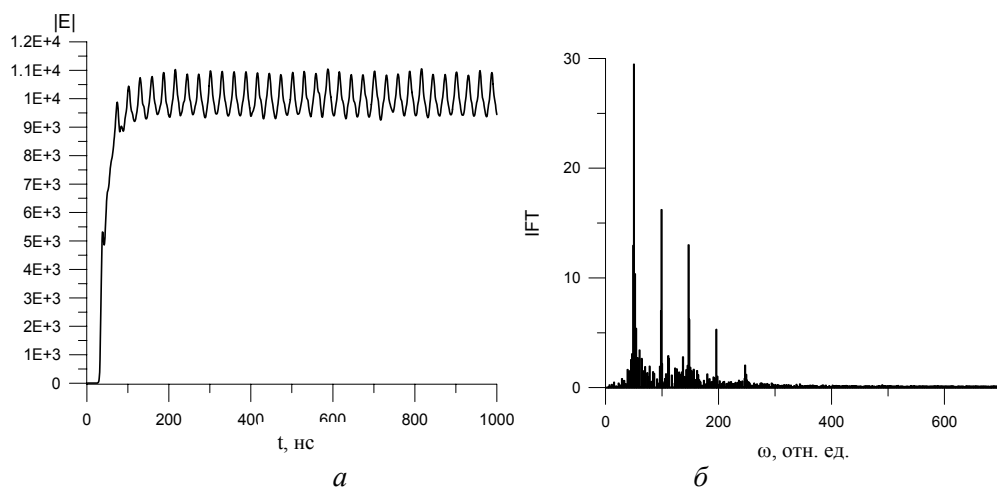


Рис. 3. Периодический режим с одной частотой и ее линейной комбинацией (а), его энергетический спектр (б)

3. Исследование хаоса в режиме генерации

Сначала ограничимся исследованием хаотического поведения в двумерной системе для геометрии Брэгга в режиме генерации. Характерные периодические режимы изображены на рис. 2–8 для следующего набора исходных параметров: $\lambda = 3$ см, $L = 20$ см, $j = 400 \div 3000$ А/см², $\beta = (-20) \div (-1)$, $\delta kL = -20 \div 20$, $l_0 = 1.0$, $\chi_0 = -0.1$, $\chi_r = 0.1$.

На рисунках 2 и 3 типичные периодические режимы с одной частотой и ее линейной комбинацией показаны вместе с их энергетическими спектрами (ИГТ). В некоторых областях параметрической карты перехода к хаосу период удваивается и учетверяется.

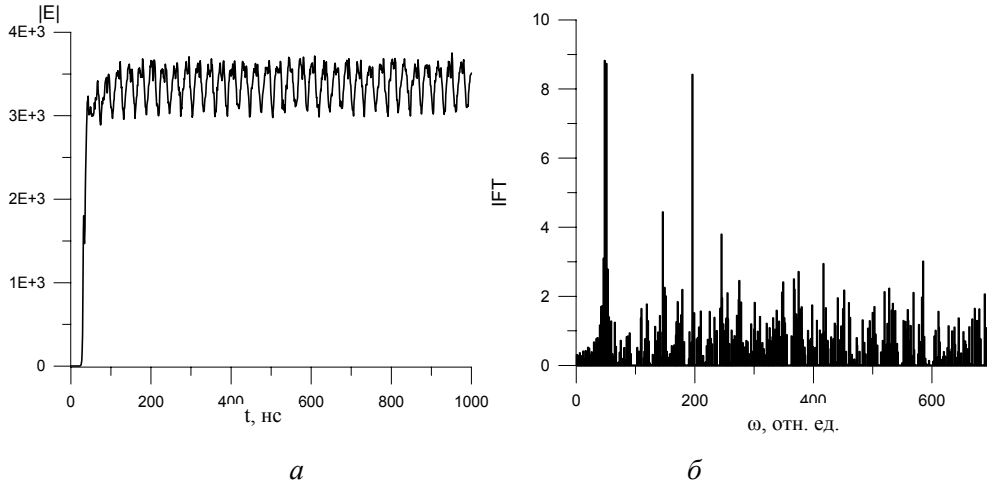


Рис. 4. «Слабый» хаос (а) и его энергетический спектр (б)

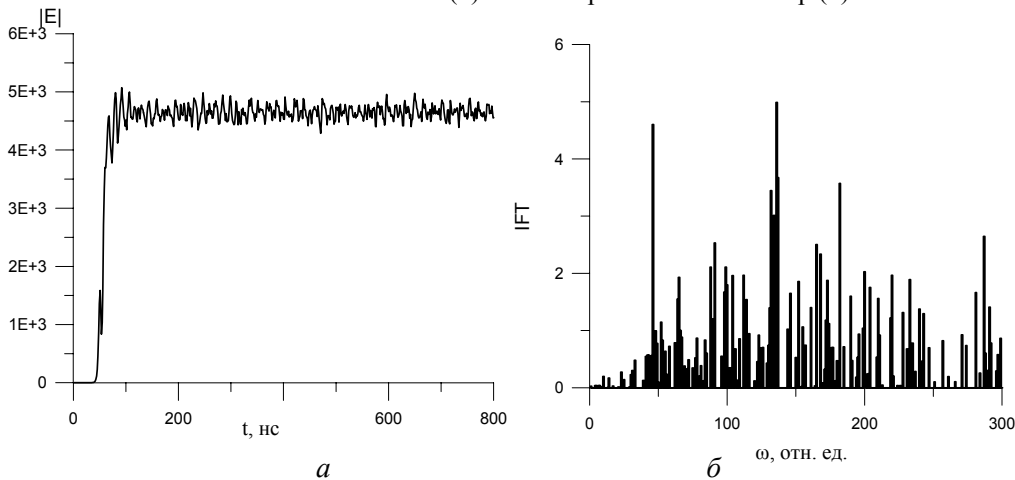


Рис. 5. Хаотические автоколебания (а) и соответствующий энергетический спектр (б)

Другой типичный режим – квазипериодические колебания с несоизмеримыми частотами, возникающими при бифуркациях Хопфа будет приведен ниже на рис. 8 и 10. В некоторых областях этот режим преобразуется в так называемый «слабый» хаос [26], где зависимость амплитуды от времени выглядит как приближительное повторение однотипных пиков близких размеров за приближительно равные промежутки времени. Этот процесс изображен на рис. 4. «Слабый» хаос и квазипериодичность ведут к стохастическим автоколебаниям или «развитому» хаосу, представленному на рис. 5.

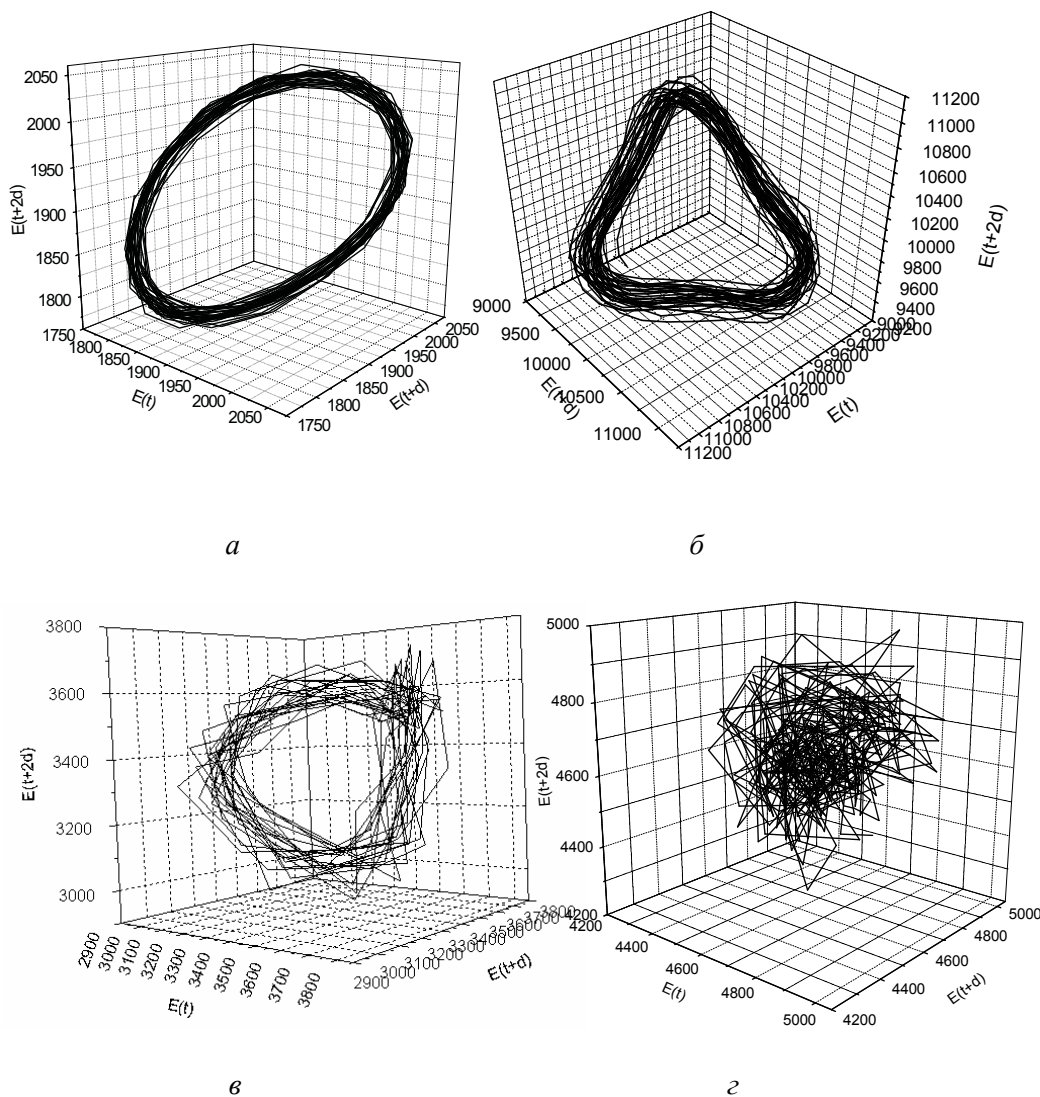


Рис. 6. Аттракторы для периодического (а), периодического с линейной комбинацией частот (б), «слабого» хаотического режима (в) и хаотических автоколебаний (г)

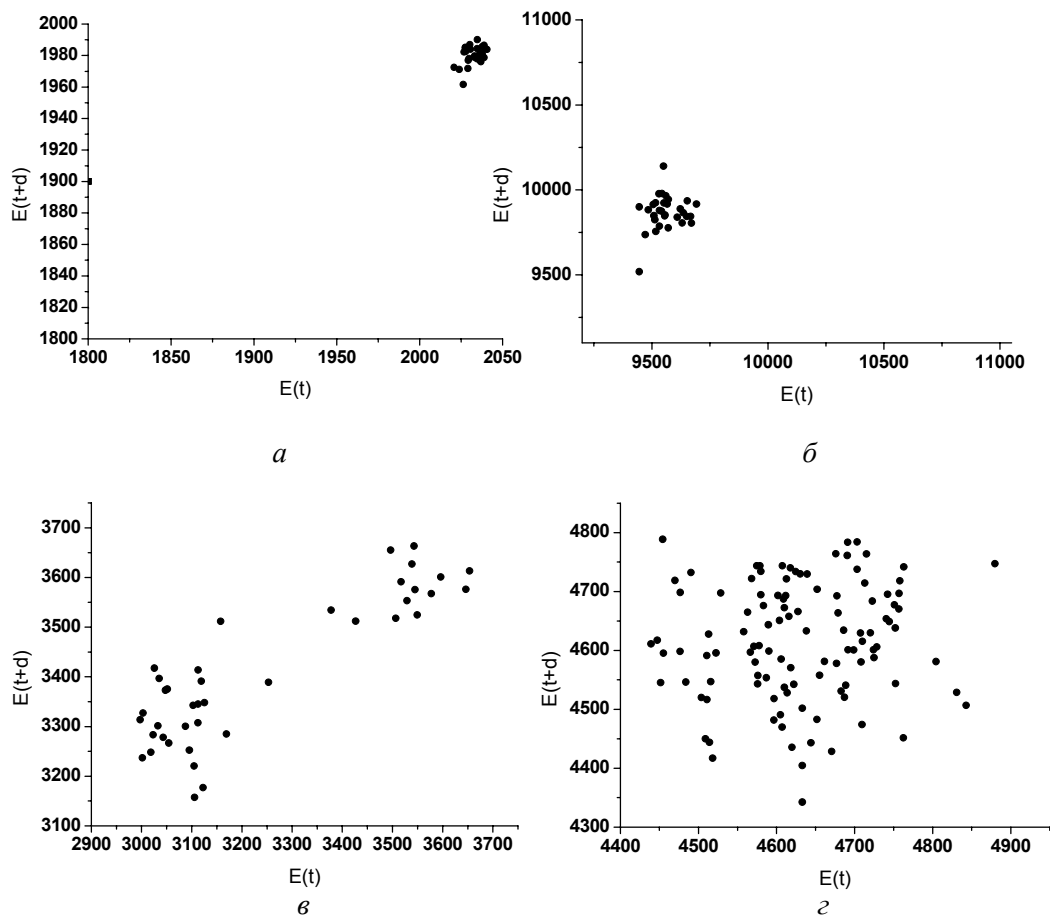


Рис. 7. Сечения Пуанкаре для периодического (а), периодического с линейной комбинацией частот (б), «слабого» хаотического режима (в) и хаотических автоколебаний (г), соответствующие рис. 6

Аттракторы – множество точек в фазовом пространстве динамической системы, к которым стремятся траектории системы – являются очень хорошей иллюстрацией периодических и хаотических режимов работы динамических систем. Соответствующие рис. 2–5 аттракторы изображены на рис. 6. Период d для каждого рисунка свой и не превышает 20 нс.

Аттракторы периодических решений расположены приблизительно в одной плоскости в фазовом пространстве, в то время как аттрактор слабого хаоса изогнут как восьмерка. Хаотические автоколебания представлены спутанным клубком линий, в котором не удастся выявить какую-либо упорядоченную структуру. Это хорошо можно продемонстрировать на так называемых сечениях или отображениях Пуанкаре [22], которые изображены на рис. 7. Здесь во всех случаях для удобства площадка S секущей поверхности выбиралась параллельной плоскости (X, Y) (или точнее $(E(t), (E(t+d)))$, поскольку интересующие нас фазовые траектории пересекают ее многократно.

Алгоритм построения сечения Пуанкаре был основан на последовательном просмотре наборов данных, используемых для построения аттракторов, и восстановлении координат точек (x, y, z_0) при пересечении фазовой траектории площадки S с координатой $z = z_0$.

Как и следовало ожидать, сечения Пуанкаре для периодических и хаотических режимов ОЛСЭ имеют соответствующий вид, а именно: для одноперiodических режимов сечения представляют собой односвязные компактные множества, а хаотические – неравномерно распределены в большом объеме. На рис. 11, *в* квазипериодический двухчастотный режим представлен двумя множествами, описывающими обе частоты.

Теперь рассмотрим переход к хаосу через перемежаемость. На рис. 8 показана следующая цепочка бифуркаций при изменении параметра плотности тока $j = 1750 \div 2350$ А/см²:

квазипериодичность ↔ хаос ↔ перемежаемость ↔ периодичность.

Для токов j , меньших 1750 А/см² (как это будет продемонстрировано ниже), наблюдаются области с периодичностью, квазипериодичностью и слабым хаосом. Аттракторы, соответствующие графику 5 на рис. 8, изображены на рис. 9. Энергетический спектр, представляющий квазипериодические колебания с двумя несоизмеримыми частотами, соответствующий рис. 8, *а*, кривая 1, изображен на рис. 10. Здесь же представлен аттрактор, который имеет форму двух изогнутых в пространстве четырехугольников, смещенных друг относительно друга, каждый из которых описывает свою частоту.

При численном решении систем уравнений всегда возникает вопрос, является ли наблюдаемый «хаос» хаосом на самом деле либо результатом некорректного учета ошибок округления или конечного порядка аппроксимации дифференциальных уравнений разностными. Одним из возможных ответов на данный вопрос является исследование чувствительности решений к малым возмущениям начальных данных. Если неустойчивость решений будет наблюдаться именно для хаотических режимов, а для периодических и квазипериодических решение будет устойчивым, то это явится хорошей верификацией используемых численных алгоритмов и программных средств. Аналитически проверить устойчивость и сходимость предложенных разностных методов не представляется возможным в силу сильной нелинейности полученной разностной и исходной дифференциальной системы.

В работе [26] показано, что неустойчивость фазовых траекторий динамического хаоса, проявляющаяся в высокой чувствительности движения к малым возмущениям начальных условий, присуща динамике ЛОВ. Исследуем свойства чувствительности полученных решений к возмущениям стартовой плотности тока пучка j для различных режимов работы ОЛСЭ-генератора. На рис. 11, *а* для слабого хаоса наблюдается отстройка от решения при изменении значения плотности тока на $\delta j = 10^{-8}$ А/см², хотя общая форма решения сохраняется, в то время как для периодического режима заметные отличия в решении наблюдаются при $\delta j = 10$ А/см², которое уже, очевидно, не является малым возмущением. Это же справедливо и для квазипериодического режима (рис. 8, кривая 2), изображенного на рис. 12 в логарифмической шкале.

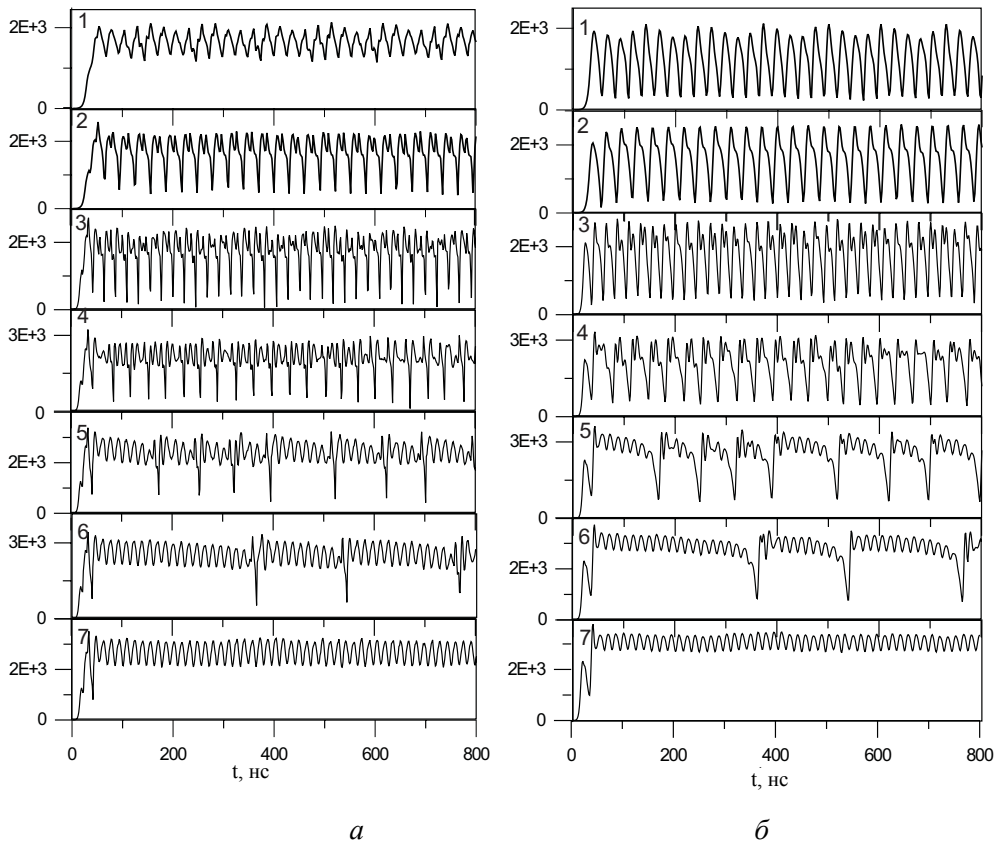


Рис. 8. Переход к хаосу через квазипериодичность и перемежаемость для проходящей (а) и дифрагированной (б) волн при плотности тока j , равной 1) 1750 A/cm^2 , 2) 1950 A/cm^2 , 3) 2150 A/cm^2 , 4) 2220 A/cm^2 , 5) 2300 A/cm^2 , 6) 2340 A/cm^2 , 7) 2350 A/cm^2

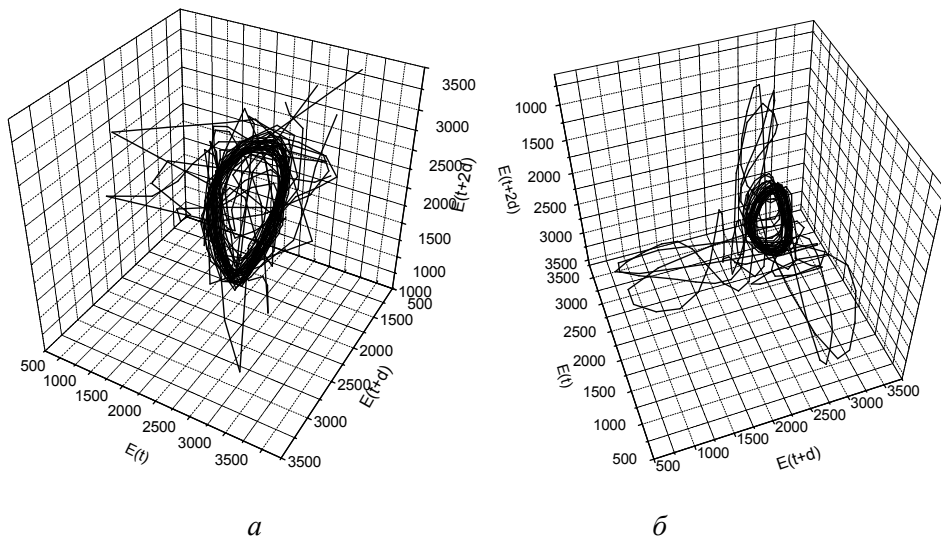


Рис. 9. Аттракторы для проходящей (а) и дифрагированной (б) волн, $j = 2340 \text{ A/cm}^2$

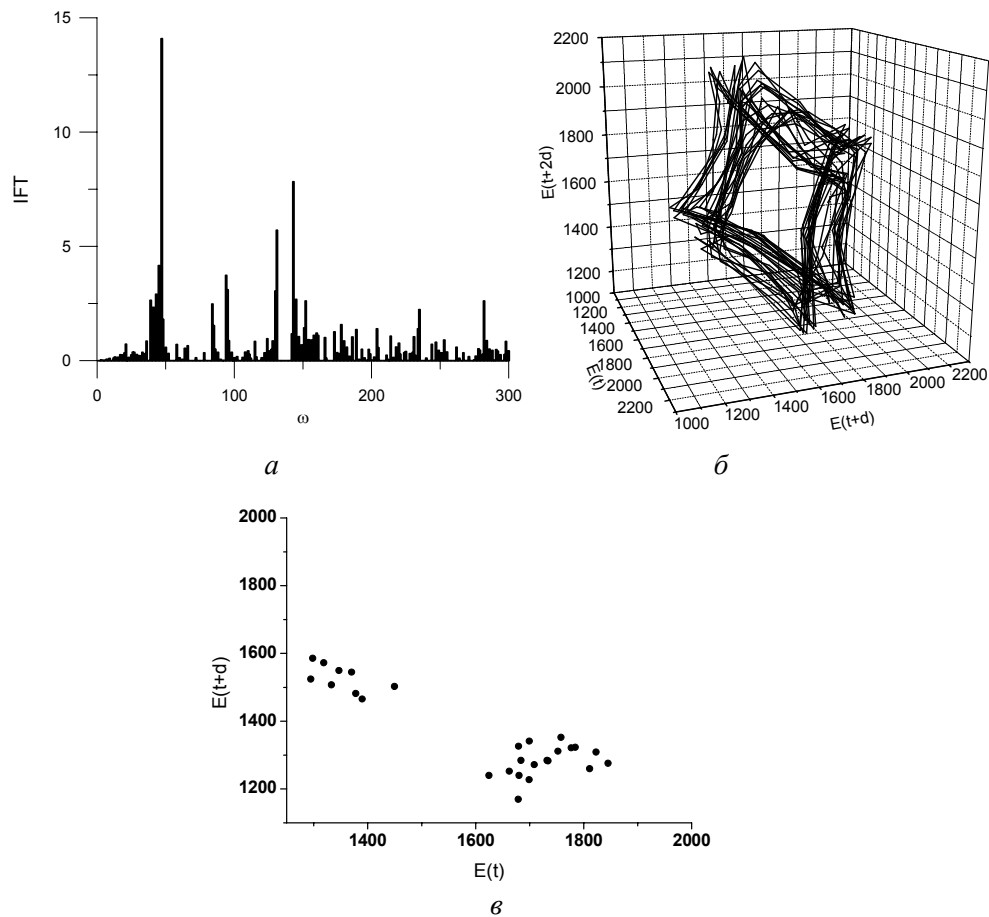


Рис. 10. Энергетический спектр (а), аттрактор (б) и сечение Пуанкаре (в) для квазипериодического режима при $j = 1750 \text{ A/см}^2$

Еще одним важным параметром, характеризующим сложную внутреннюю динамику системы, являются старшие ляпуновские характеристические показатели [22]. Пусть для двух близких начальных условий

$$f(t_1) \approx f(t_2)$$

задано малое возмущение

$$\Delta^0 = f(t_1) - f(t_2).$$

Если обозначить

$$\Delta_t \approx f(t_1 + t) - f(t_2 + t),$$

то можно записать, что

$$\Delta_t \approx \Delta^0 \exp(\lambda t).$$

Здесь показатель Ляпунова λ характеризует среднюю скорость экспоненциального разбегания соседних точек, что ведет к хаосу. Кроме этого, он определяет среднюю потерю информации о состоянии динамической системы с течением

времени. В N -мерной динамической системе существует ровно N ляпуновских показателей. Старший показатель предоставляет наибольшую информацию о системе, поскольку если он положителен, то система является хаотической. В частности, для размерности $N = 3$ набор показателей Ляпунова соответствует следующим вариантам поведения системы: $\langle -, -, - \rangle$ – притягивающая неподвижная точка, $\langle 0, -, - \rangle$ – предельный цикл, $\langle 0, 0, - \rangle$ – двумерный тор, $\langle +, 0, - \rangle$ – странный аттрактор (слабый хаос). В случае большей размерности может существовать вариант $\langle +, +, 0, \dots \rangle$, соответствующий гиперхаосу, когда положительных показателей больше одного.

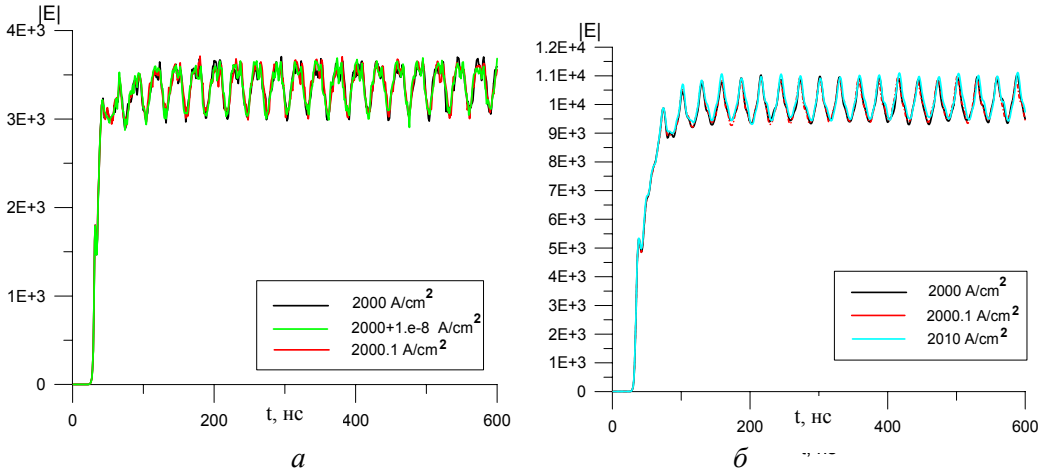


Рис. 11. Чувствительность (а) слабого хаотического решения (рис. 4) и (б) периодического решения (рис. 3) генератора к возмущению плотности тока пучка

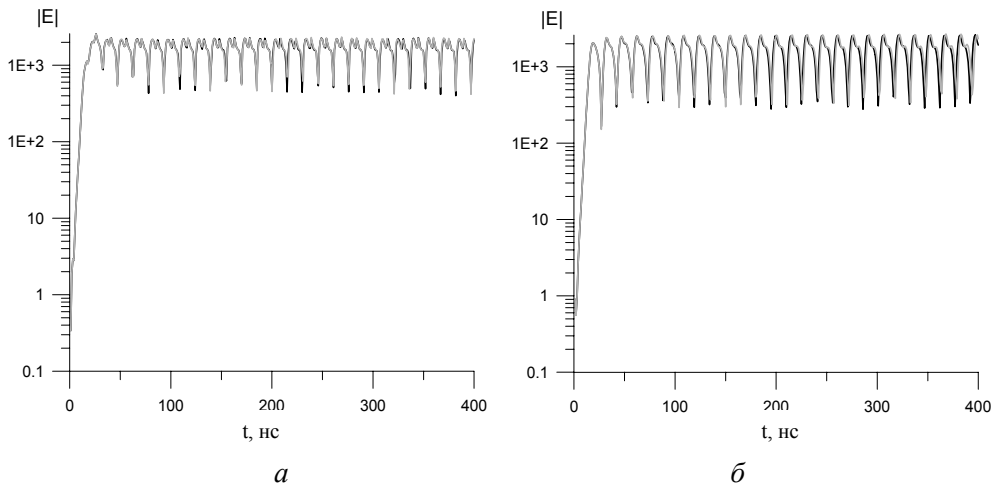


Рис. 12. Чувствительность квазипериодического решения (рис. 8, графики 2) для проходящей (а) и дифрагированной (б) волн к возмущению плотности тока пучка, черная линия $-j = 1950 \text{ A/cm}^2$, серая линия $-j = 1960 \text{ A/cm}^2$

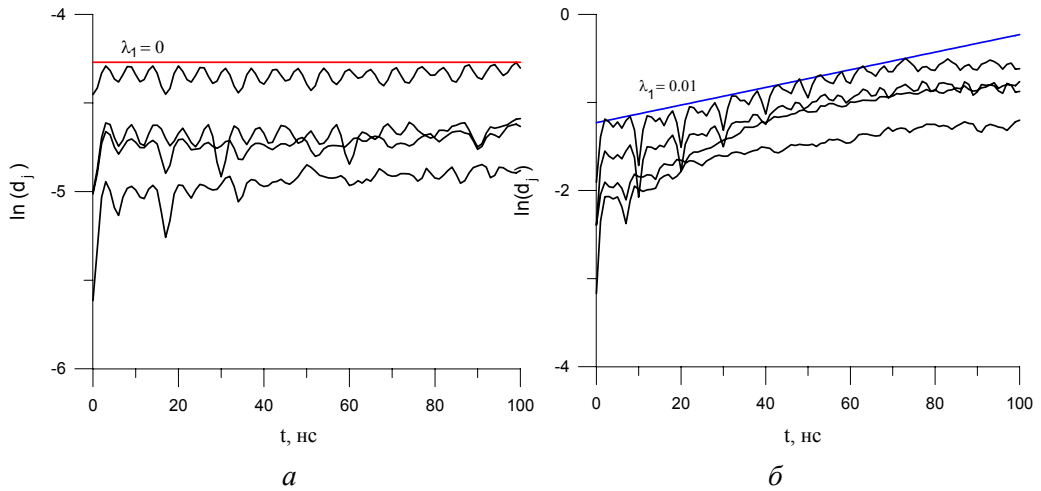


Рис. 13. Старшие показатели Ляпунова для (а) периодического режима (рис. 2) и (б) хаотических автоколебаний (рис. 8, а, кривая 4, $j = 2340 \text{ А/см}^2$)

Преимуществом алгоритма Розенштейна [28], которым мы пользовались, и кода L1D2 [29] является использование только одного набора данных относительно небольшой размерности (вплоть до нескольких сот временных точек). В соответствии с этим алгоритмом рассматривается множество значений функции в зависимости от времени вида:

$$\{f_1, f_2, \dots, f_N\}.$$

Из этого множества значений строятся векторы состояний:

$$F_i = [f_i, f_{i+J}, \dots, f_{i+(m-1)J}],$$

где J есть задержка, а m – размерность вложения.

Из векторов состояний F_i формируется реконструируемая траектория

$$F = [F_1, F_2, \dots, F_M]^T.$$

Если рассмотреть расходимость в i -й момент времени:

$$d_j(i) = \min_{F_j} \|F_j - F_j\|,$$

где $\|\cdot\|$ есть Евклидова норма, то

$$\ln d_j(i) \approx \ln \Delta_j^0 + \lambda_1(i\Delta t),$$

где Δ_j^0 – начальное малое возмущение, Δt – шаг по времени.

На рисунке 13 приводится аппроксимация старших показателей Ляпунова для периодического режима (рис. 2, а) с $\lambda_1 = 0$ (как и должно быть в случае предельного цикла) и хаотических автоколебаний (рис. 8, а, кривая 1) с $\lambda_1 = 0.01$. Каждая из осциллирующих кривых соответствует проведенным по программе

L1D2 вычислениям (данные были отнормированы) для различных значений задержек J и размерностей вложения m . Как и следовало ожидать, в первом случае старший показатель Ляпунова равен нулю, что полностью соответствует решению с предельным циклом, а во втором – показатель положителен. Здесь можно было бы привести аналогичное рис. 11 и рис. 12 исследование чувствительности решения к малым возмущениям начальных данных – и в первом случае решение было бы устойчиво, а во втором – нет (подобное исследование для случая ОЛСЭ-усилителя и возмущения амплитуды падающей на систему внешней волны $|E|$ при $j = 2340 \text{ A/см}^2$ приведено на рис. 16, б).

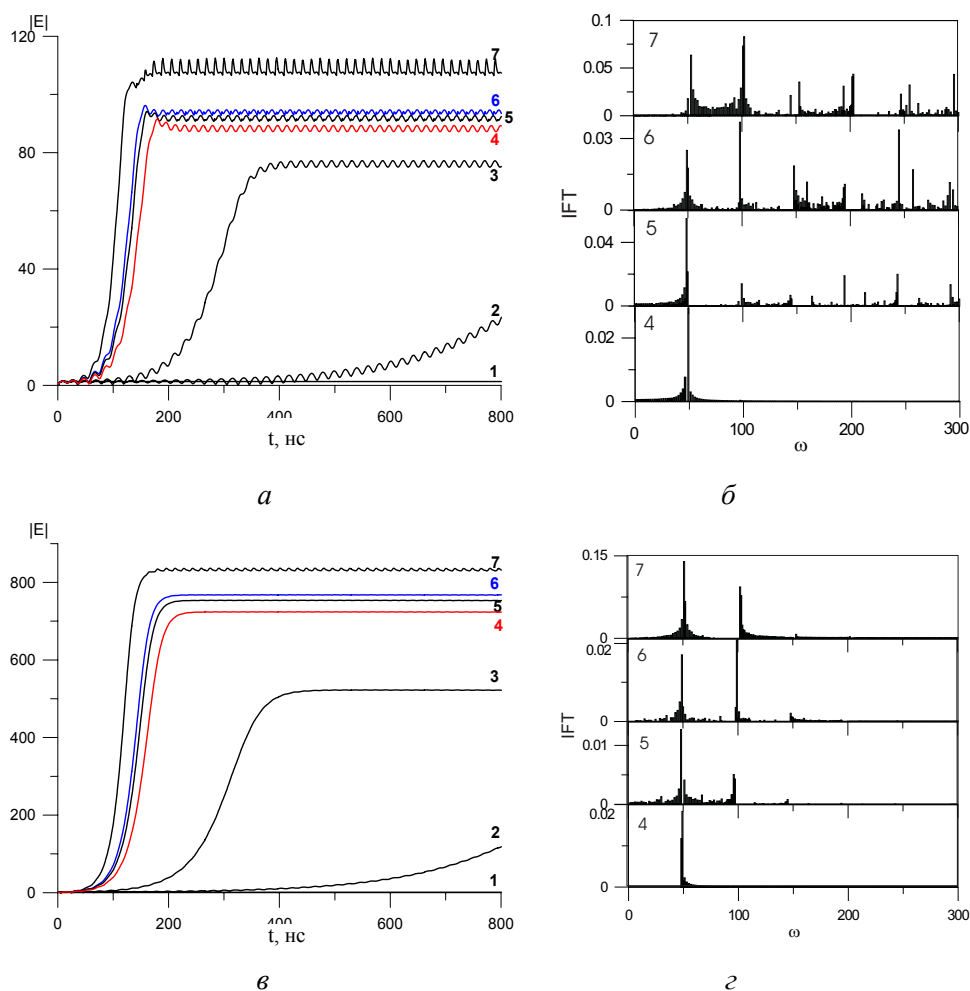


Рис. 14. Режимы периодичности и квазипериодичности для проходящей (а) и дифрагированной (в) волн в режиме усиления с соответствующими (б) и (г) энергетическими спектрами для следующих параметров плотности тока пучка j :
 1) 350 A/см^2 , 2) 450 A/см^2 , 3) 470 A/см^2 , 4) 515 A/см^2 , 5) 525 A/см^2 ,
 6) 528 A/см^2 , 7) 550 A/см^2

4. Хаос в режиме усиления

Помимо режима генерации ОЛСЭ, представленного на рис. 2–11, мы исследовали режим усиления для амплитуды падающей внешней волны $|E| = 1$ при прочих равных условиях. Оказалось, что после преодоления порога генерации в режиме генерации существует область устойчивого состояния, в то время как в режиме усиления реализуется периодический режим. С увеличением тока пучка режим сильного усиления начинает качественно совпадать с режимом генерации. Это иллюстрируется на рис. 14 и 15.

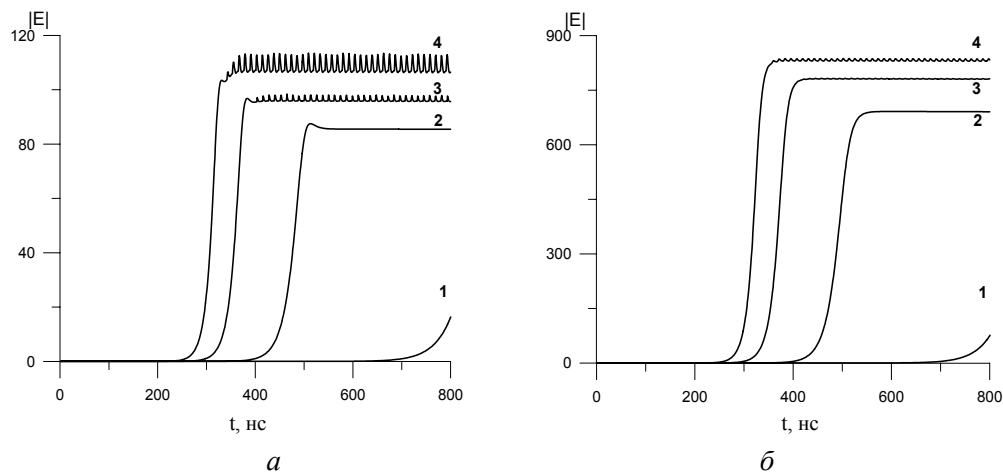


Рис. 15. Режимы устойчивости и периодичности для проходящей (а) и дифрагированной (б) волн в режиме генерации для следующих параметров плотности тока пучка j : 1) 490 A/cm^2 , 2) 505 A/cm^2 , 3) 530 A/cm^2 , 4) 550 A/cm^2

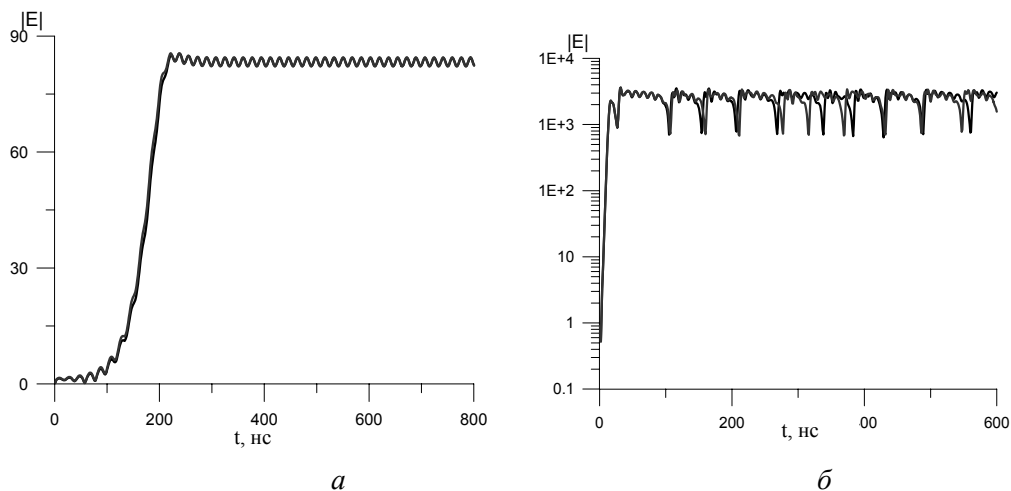


Рис. 16. Решение в случае возмущения начальных данных (а) $j = 500 \text{ A/cm}^2$, $|E| = 1$ (черная кривая) и $|E| = 1.1$ (серая кривая); (б) $j = 2340 \text{ A/cm}^2$, $|E| = 1$ (черная кривая) и $|E| = 1 + 10^{-15}$ (серая кривая)

Продолжим исследование устойчивости фазовых траекторий динамического хаоса к малым возмущениям начальных условий ОЛСЭ. Исследуем свойства чувствительности полученных решений к возмущениям начального условия $|E| = 1$ для режима усиления ОЛСЭ. На рис.16, *a* приведено решение системы для $j = 500 \text{ A/cm}^2$ для $|E| = 1$ и $|E| = 1.1$. Видно, что периодическое решение устойчиво к возмущению начальных данных, что нельзя сказать о хаотическом решении при $j = 2340 \text{ A/cm}^2$ (рис.16, *б*). Поскольку вычисления проводились с двойной точностью, то даже возмущение 10^{-15} чувствительно проявляется в решении.

5. Параметрические карты осцилляций в ОЛСЭ

В работах [17–19] приведены карты динамических режимов осцилляций ОЛСЭ на параметрических плоскостях: (j, β) , (j, δ) , (j, L) . Полученные картины перехода к хаосу с наличием областей периодичности, квазипериодичности и хаоса продемонстрировали, что среди различных режимов хаоса есть окна периодичности и для прошедших, и для дифрагированных волн, а увеличение плотности тока пучка не приводит к хаосу автоматически.

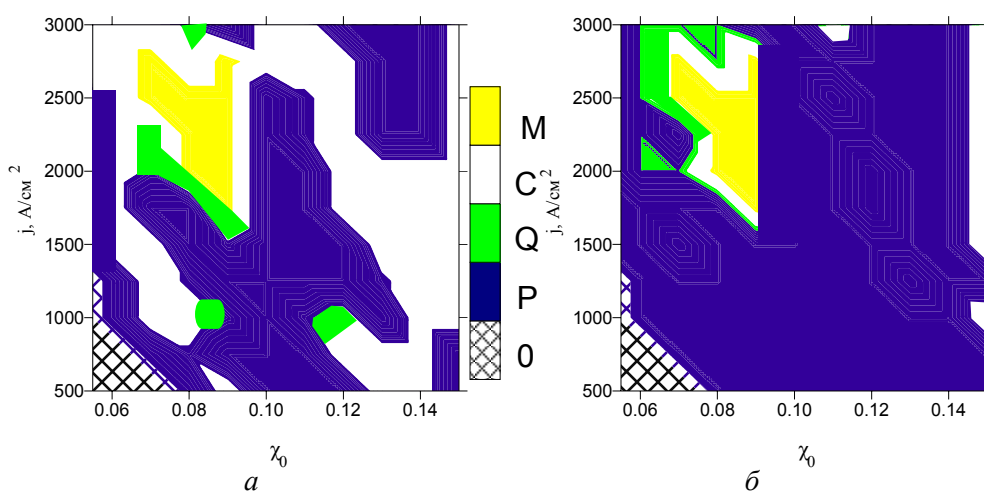


Рис. 17. Параметрическая картина перехода к хаосу в ОЛСЭ при изменении коэффициента $|\chi_0|$ разложения диэлектрической восприимчивости среды в ряд по векторам обратной решетки для прошедшей (*a*) и дифрагированной (*б*) волн.

0 описывает область ниже порога генерации. P – периодические режимы, Q – квазипериодичность, C – хаос, M – переход между высокоамплитудными и низкоамплитудными режимами

Рассмотрим следующие параметрические карты перехода к хаосу для параметров (j, χ_0) (рис. 17) и (j, l_0) (рис. 18). Изменение диэлектрической проницаемости резонатора может быть вызвано изменением материала и толщины нитей резонатора, а также расстояния между нитями. Анализ диэлектрической проницаемости фотонных кристаллов, используемых в ОЛСЭ в качестве резонаторов, проведен в работе [8]. Системный параметр l_0 описывает волновой вектор проходящей волны внутри резонатора.

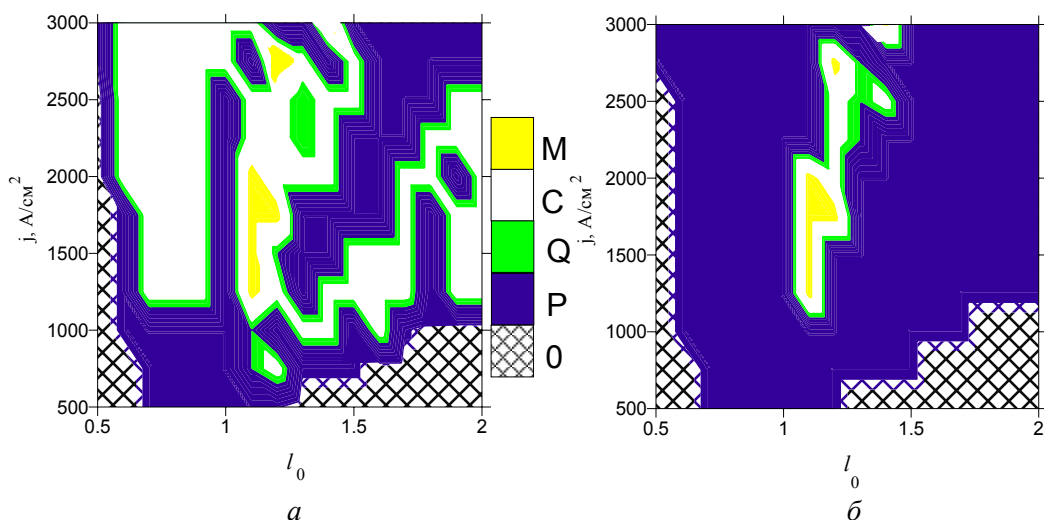


Рис. 18. Сценарий перехода к хаосу в ОЛСЭ при изменении системного параметра l_0 для прошедшей (а) и дифрагированной (б) волн. 0 означает, что плотность тока находится ниже порога. P – периодические режимы, Q – квазипериодичность, C – хаос, M – переход между высокоамплитудными и низкоамплитудными режимами

Из рисунков 17 и 18 видно, что обе параметрические карты достаточно грубы, для их уточнения требуется большая вычислительная работа. Данные параметрические карты не такие «пестрые», как полученные в [17–19]. Однако здесь, как и ранее в [17–19], наблюдается полоса периодичности вдоль порога генерации, которая затем сложным образом трансформируется в различные хаотические режимы через удвоение периода, бифуркации Хопфа, вводящие в систему новые основные частоты, а также через переходы между высокоамплитудными и низкоамплитудными режимами.

6. Заключение

Разработанные вычислительные алгоритмы могут эффективно применяться при моделировании нелинейных режимов работы ОЛСЭ, что было подтверждено численными экспериментами. Численные результаты согласуются с аналитическими оценками, полученными в линейном приближении. На основании проведенного анализа можно сделать вывод о возможности численно моделировать работу ОЛСЭ в будущих экспериментах.

Поскольку имеется свыше десяти управляющих параметров, то проблема исследования перехода к хаосу в ОЛСЭ представляется очень сложной. Однако даже исследование некоторых переходов между режимами «порядок – хаос» является важным в свете проводимых в НИИ ЯП экспериментальных исследований ОЛСЭ.

Литература

1. *Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D.* // Physics Let. A. 1984. Vol.102. P. 141.
2. *Барышевский В. Г.* // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. С. 1336.
3. *Барышевский В. Г., Дубовская И. Я., Феранчук И. Д.* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н. 1988, № 1. С. 92.

4. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya.* // J. Phys. D. 1991. Vol. 24. P. 1250.
5. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya.* // Phys. Stat. Sol. 1992. Vol. B169. P. 235.
6. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya.* // NIM. 1994. Vol. A341. P. 274.
7. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya.* // NIM. 1996. Vol. A375. P. 292.
8. *Baryshevsky V. G., Gurinovich A. A.* // NIM. 2006. Vol. B252, P. 92.
9. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G. et al.* // NIM. 2002. Vol. A483. P. 21
10. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G. et al.* // NIM. 2003. Vol. A507. P. 137.
11. *Baryshevsky V. G., Batrakov K. G. et al.* // NIM. 2006. Vol. B 252. P. 86.
12. *Batrakov K., Sytova S.* // Mathematical Modelling and Analysis. 2005. Vol. 10. P.1.
13. *Батраков К. Г., Сытова С. Н.* // ЖВМ и МФ. 2005. Т. 45, № 4. С. 690.
14. *Batrakov K., Sytova S.* // Nonlin. Phen. Compl. Syst. 2005. Vol. 8. P. 42.
15. *Batrakov K., Sytova S.* // Nonlin. Phen. Compl. Syst. 2005. Vol. 8, N4. P. 359.
16. *Batrakov K., Sytova S.* // Mathematical Modelling and Analysis. 2006. Vol. 11. P. 13.
17. *Sytova S.* // Mathematical Modelling and Analysis, 2008. Vol. 11. P. 263.
18. *Сытова С. Н.* // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. н. 2008. N 9. С. 29.
19. *Sytova S.* // Proc. of the 6th Euromech Nonlinear Dynamics Conference (ENOC-2008). 2008. c7p69r4325.pdf
20. *Пинскер З. Г.* Рентгеновская кристаллооптика. 1982.
21. *Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. 1973.
22. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: введение. 1984.
23. *Hur M. S., Lee H. J., Lee J. K.* // Phys. Rev. 1998. Vol. E58. P. 936.
24. *Coupric M. E.* // NIM. 2003. Vol. A507. P. 1.
25. *Гинзбург Н. С., Зотова И. В. и др.* // ЖТФ. 2002. Т. 7. С. 83.
26. *Кузнецов С. П., Трубецков Д. И.* // Известия вузов. Радиофизика. 2004. Т. XLVII. С. 383.
27. *Hahn S. L., Lee J. K.* // Phys. Rev. 1993. Vol. E48. P. 2162.
28. *Rosenstein M. T. et al.* // Physica. 1993. Vol. D65. P. 117.
29. <http://www.physionet.org/physiotools/lyapunov/l1d2/>

FIRST STEPS IN INVESTIGATION OF CHAOTIC DYNAMICS IN VOLUME FREE ELECTRON LASER

S. N. Sytova

First lasing of Volume Free Electron Lasers (VFEL) in mm wavelength range was obtained recently [9]. So-called multi-wave volume distributed feedback (VDVB) where electromagnetic waves and electron beam spread angularly one to other is the distinctive feature of VFEL. The principles and theoretical foundations of VFEL operation based on mechanism of VDVB were proposed in [1]. The main VFEL characteristic property is that the increment of instability for an electron beam passing through a spatially-periodic target in degeneration points essentially increased in comparison with single-wave system. This means the noticeable reduction of electron beam current density necessary for achievement the generation threshold for all wavelength ranges regardless the spontaneous radiation mechanism.

In VFEL operation the linear stage investigated in [2–7] quickly changes into the nonlinear one where most of the electron beam energy is transformed into electromagnetic radiation. A detailed numerical analysis of this stage is necessary for experiment design, optimal geometry determination and result processing.

Mathematical model and numerical methods for VFEL nonlinear stage simulation were proposed [13], [14]. They are implemented in computer code VOLC [17]. Different VFEL

geometries were investigated [12–19] numerically. All numerical results are in good agreement with analytical predictions.

In electronic generators and amplifiers such as free electron lasers, backward wave tube, travelling wave tube etc. self-oscillations are due to interaction of electron beam and electromagnetic field under distributed feedback. Investigation of chaos in such devices is of great interest in modern physics. In VFEL chaotic dynamics is induced by such interaction too.

Investigation of chaos in VFEL is important in the light of experimental development of VFEL at Research Institute for Nuclear Problems. As more than ten control parameters are in the system it is very complicated to investigate the full picture of possible chaotic behaviour in VFEL. We restricted ourselves to investigate here the chaotic behaviour in two-wave VFEL for Bragg geometry in amplifier and oscillator generation regimes. We considered some cases of possible root to chaos in VFEL for laser intensity with corresponding space portraits and attractors. Solution bifurcation points corresponding to transitions between different regimes of generation are considered. Parametric maps with respect to electron beam current and (1) resonator susceptibility, (2) system parameter present complicated root to chaos with windows of periodicity and quasiperiodicity.