

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В УСЛОВИЯХ МНОГОВОЛНОВОЙ ДИФРАКЦИИ ФОТОНОВ

И. Я. Дубовская

Экспериментальное наблюдение многоволнового параметрического рентгеновского излучения (ПРИ)

В 1989 г. экспериментальной группой НИИ ЯП на синхротроне в г. Томске были проведены измерения угловых распределений ПРИ, генерируемого релятивистскими электронами с энергией 500–900 МэВ в кристалле AsGa [1, 2]. В эксперименте наблюдались аномалии, не объяснимые с точки зрения 2-волновой теории ПРИ [3, 4]. Анализ геометрии эксперимента показал, что для излучаемых фотонов возможно выполнение условий многоволновой дифракции. На рис. 1 приведены волновые схемы двух экспериментов.

Кристаллическая мишень AsGa толщиной $L = 400$ мкм вырезалась параллельно плоскости (100) и помещалась в гониометр таким образом, что электронный пучок влетал в кристалл вблизи направления, соответствующего 4-волновой дифракции (000), (220), $(\bar{1}\bar{5}3)$, $(1\bar{5}\bar{3})$ для рентгеновских фотонов с энергией 18,4 кэВ [1], а также вблизи направления, соответствующего 8-волновой дифракции (000), (400), (022), $(02\bar{2})$, (202), $(20\bar{2})$, (404), (440) для фотонов с энергией 6,2 кэВ. Излучение детектировалось линейным позиционно-чувствительным детектором (PSD).

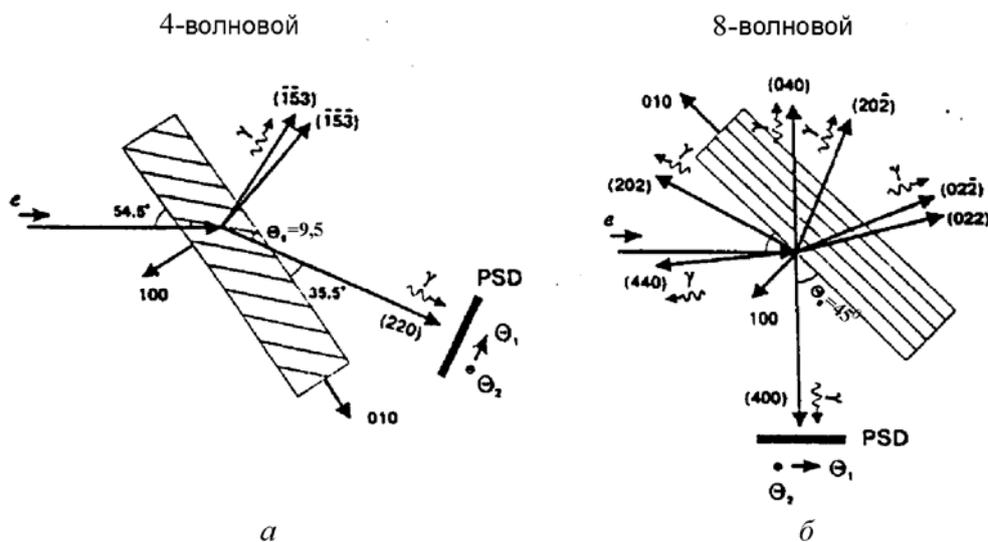


Рис. 1. Схема 4-волнового (а) и 8-волнового (б) ПРИ экспериментов: e обозначает направление падения электронного пучка; γ обозначает возможные в этой геометрии направления вылета γ -квантов из кристалла в брэгговских направлениях; PSD – положение позиционно чувствительного детектора, регистрирующего γ -кванты в один из брэгговских рефлексов. Углы θ_1 и θ_2 изменяются вдоль детектора в плоскости рисунка и перпендикулярно ей соответственно; θ_B – угол Брэгга для детектируемого рефлекса

Измерялись сечения угловых распределений относительно угла θ_1 при различных значениях угла θ_2 (θ_1 и θ_2 – углы между волновым вектором фотона \vec{k} и направлением точного выполнения условий дифракции соответственно в плоскости дифракции и перпендикулярно ей (см. рис. 1)).

На рис. 2 представлены сечения угловых распределений ПРИ, наблюдаемые в эксперименте.

Из рис. 2 видно, что в случае 4-волновой геометрии эксперимента наблюдалась асимметрия правого и левого пиков в угловом распределении ПРИ, которая исчезала при отклонении детектора относительно угла θ_2 .

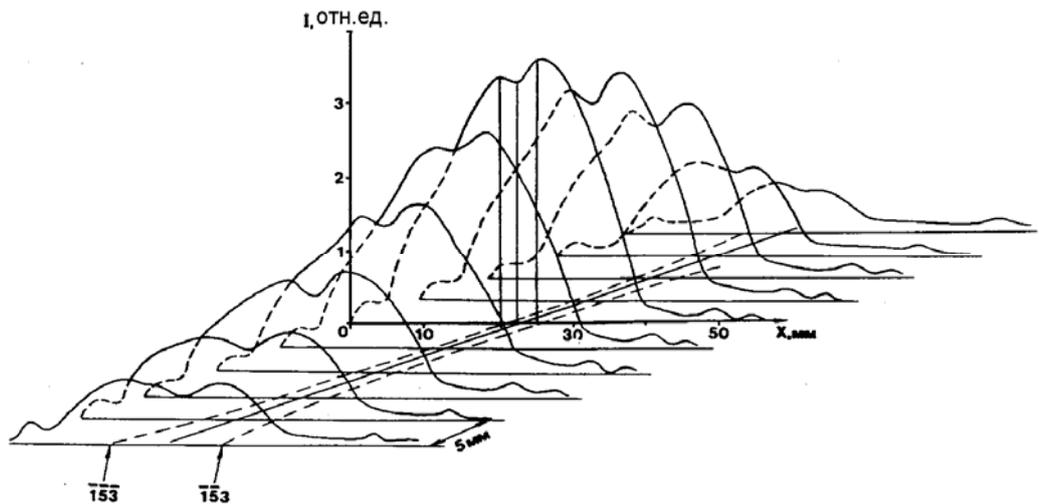


Рис. 2. Экспериментальные угловые сечения ПРИ в случае 4-волновой дифракции

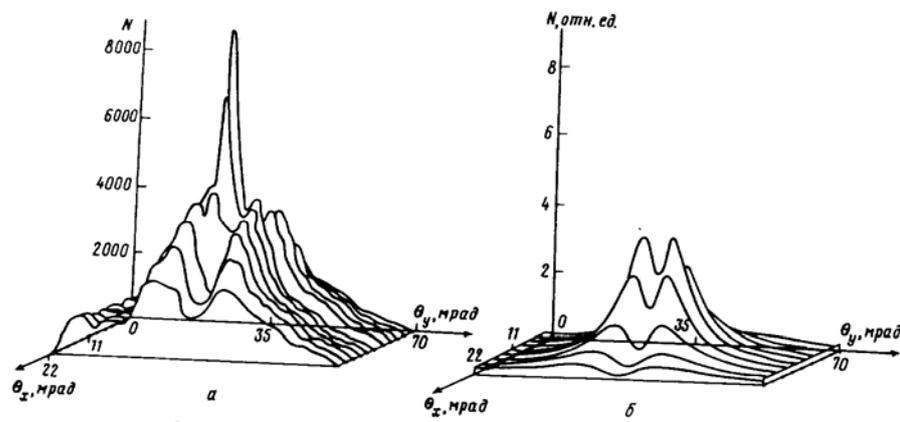


Рис. 3. Экспериментальное угловое распределение для 8-волновой генерации ПРИ (а) и 2-волновое угловое распределение (б), рассчитанное для основного рефлекса (400)

Теория ПРИ, разработанная для случая возбуждения двух сильных волн при дифракции [3, 4], предсказывает симметричное угловое распределение, поэтому экспериментаторы предположили, что наблюдаемая асимметрия может быть проявлением многоволновых эффектов. Выполнение условий многоволновой дифракции накладывает сильные ограничения на направление падения γ -кванта. При отклонении фотона относительно угла θ_2 в любую сторону на угол $\theta_2 \geq |\chi_r| \approx 10^{-5}$ рад 4-волновая дифракция распадается на две независимые 2-волновые и асимметрия исчезает.

В случае падения пучка вблизи направления 8-волновой дифракции (рис.1, б) наблюдается также резкая асимметрия правого и левого пиков, причем на фоне 2-волнового правого пика наблюдается узкий дополнительный пик излучения (см. рис. 3). Интенсивность излучения в дополнительном пике в 2,5 раза больше и угловая ширина пика в 4 раза меньше, чем соответствующие характеристики основного (400) рефлекса ПРИ для 2-волновой генерации. Для сравнения на рис. 3 приведено угловое распределение, соответствующее возбуждению двух сильных волн при дифракции.

Генерация ПРИ в случае многоволновой дифракции (теоретическое рассмотрение)

Наблюдаемые аномалии в угловом распределении дали толчок к проведению теоретических исследований многоволновой генерации ПРИ в НИИ ЯП. В работах [5, 6] было получено общее выражение для спектрально-углового распределения ПРИ в дифракционный пик в произвольном случае возбуждения N сильных волн с помощью матричного метода. Дан анализ дисперсионного уравнения, получено угловое распределение в толстом кристалле и рассмотрено несколько простых случаев возможного проявления многоволновых эффектов в ПРИ. В частности, подробно проанализирована геометрия 3-волновой компланарной дифракции Лауэ – Лауэ и Брэгг – Брэгг. Показана возможность наблюдения эффекта окольного возбуждения рефлекса, запрещенного для 2-волновой генерации ПРИ, а также возможность уменьшения линейного коэффициента поглощения [5–7]. Генерацию ПРИ в более сложных и некомпланарных случаях дифракции фотонов можно рассчитать только численными методами. Для этого был разработан соответствующий алгоритм. Анализ показал, что примененный в [6, 7] метод больше подходит для аналитического рассмотрения проблемы и неудобен для численных расчетов, так как требует проведения операций с экспонентами от комплексных матриц. Поэтому для численных расчетов был разработан алгоритм на основе методов, традиционно используемых для расчетов в рентгеновской многоволновой дифракции фотонов. Это стало возможным в рамках теории, использующей стационарные решения однородных уравнений Максвелла для решения проблемы излучения частицами, движущимися в веществе [4].

$$d N_{n,\omega}^s = \left(\frac{e\omega}{2\pi} \right)^2 \left| \int_{t_0}^{t_1} (\vec{E}_{-k}^{(+s)}(\vec{r}(t), \omega) \vec{v}(t)) \exp(i\omega t) dt \right|^2 \frac{d\omega}{\omega} d\Omega, \quad (1)$$

где \vec{v} и $\vec{r} = \vec{v} \cdot t$ – соответственно скорость и координатный вектор частицы; $\omega = |\vec{k}|$, $\vec{k} = -(\omega\vec{v} + \vec{h})$ – волновой вектор фотона, падающего на кристалл из точки наблюдения фотона, излученного частицей в направлении брэгговского рефлекса, соответствующего вектору обратной решетки кристалла \vec{h} ; $\vec{E}_{-k}^{(+s)}$ – электромагнитное поле фотона в кристалле, s обозначает π - и σ -поляризации, $\vec{n} = \vec{k} / |\vec{k}|$. Интегрирование выполняется по временному интервалу (t_0, t_1) движения частицы в кристалле.

Метод численного расчета амплитуд электромагнитного поля $\vec{E}_{-k}^{(+s)}(\vec{r}, \omega)$ на основе методов многоволновой динамической теории дифракции [8, 9] и метод расчета интеграла разработаны и описаны в [10].

В результате преобразования спектрально-углового распределения многоволнового ПРИ, полученного в [5, 6], исходное для численного расчета выражение, определяющее число фотонов в спектральный интервал $d\omega$, можно представить в виде

$$d N_{k,\omega}^s = \left(\frac{e\omega}{2\pi} \right) \left| \sum_{s'=\sigma}^{\pi} \sum_{j=1}^{2N} (\vec{v} \cdot \vec{e}_h^{s'}) \lambda_{s'}^{(j)}(\omega) \frac{D_h^{s'(j)}}{Q^{(j)}(\omega)} \right|^2 \frac{d\omega}{\omega}, \quad (2)$$

где $D_h^{s'(j)}(\omega)$ – амплитуда блоховской волны для дифракционного отражения h для j -й дисперсионной ветви; $\lambda_{s'}^{(j)}(\omega)$ – коэффициент возбуждения j -й дисперсионной ветви.

$$Q^{(j)}(\omega) = \omega(\gamma^{-2} + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_v^2 + \theta_s^2) / 2 + \omega\gamma_h(\varepsilon^{(j)} - \alpha_h), \quad (3)$$

где $\varepsilon^{(j)}$ определяет коэффициент отражения блоховской волны на j -й дисперсионной ветви как функцию параметра отклонения от точного условия дифракции Брэгга для h -го рефлекса; $\alpha_h = \left[\left(\vec{k}_0 + \vec{h} \right)^2 - \omega^2 \right] / 2\omega^2\gamma_h$; γ_h – косинус угла

между вектором $\vec{k}_h = \vec{k} + \vec{h}$ и внутренней нормалью к поверхности кристаллической мишени; $\gamma = E/m$ – фактор Лоренца; θ_v – угол отклонения скорости частицы от точного выполнения условий многоволновой дифракции; θ_s – среднеквадратичный угол многократного рассеяния частицы в кристалле.

Обратим внимание, что в формуле (2) содержится два вида резонансных функций. Дифракционная амплитуда $D_h^{s'(j)}$ имеет максимум при $\alpha_h = 0$ и характеризуется спектральной шириной на полувысоте $d\omega/\omega \cong |\chi_h|$ (χ_h – коэффициент разложения Фурье по векторам обратной решетки диэлектрической восприимчивости кристалла). С увеличением $|\chi_h|$ амплитуда уменьшается как $1/|\alpha_h|$. Второй резонанс определяется условием $\text{Re } Q^{(j)}(\omega) = 0$ и соответствует черенковскому условию, т. е. синхронизму между фазовой скоростью волны и скоростью частицы. Черенковский пик более узкий, чем дифракционный, и его шири-

на задается мнимой частью диэлектрической восприимчивости кристалла для j -й ветви ($d\omega/\omega \cong \text{Im}(\varepsilon^{(j)}) \cong \text{Im}|\chi_h| \approx 10^{-2}|\chi_h|$), но спектральная его интенсивность может быть в $10^2 \div 10^3$ раз больше. Число черенковских пиков определяется из решения дисперсионного уравнения и может достигать $2(N-1)$ в случае N -волновой дифракции.

Угловое распределение, измеряемое на эксперименте, может быть получено из выражения (2) интегрированием по частоте и суммированием по поляризациям излучаемых фотонов:

$$dN_k = \sum_{s=\sigma,\pi} dN_{k,\omega}^s \frac{d\omega}{\omega}.$$

Анализ 4-волнового эксперимента

При сравнении теоретических и экспериментальных угловых распределений необходимо учесть следующие обстоятельства. Характер многоволновой дифракции сильно зависит от направления падения излучающего пучка электронов на кристалл, так как релятивистская частица излучает фотон в узкий угловой конус относительно направления скорости частицы. Многоволновой эффект исчезает, если электрон отклоняется на угол $|\theta_v| \gg \max(\gamma^{-2}, \theta_s^2)$ от направления точного выполнения условия многоволновой дифракции.

С другой стороны, многоволновые эффекты не проявляются, если угол падения релятивистской частицы совпадает с направлением многоволновой дифракции, так как кванты ПРИ не излучаются непосредственно вдоль направления движения частицы.

К сожалению, экспериментаторы не учли это обстоятельство и при проведении эксперимента не фиксировали угол падения пучка электронов относительно направления точного выполнения условий многоволновой дифракции (угол θ_v). Чтобы оценить возможный вклад многоволновой дифракции в угловое распределение ПРИ, был рассмотрен случай, когда многоволновые эффекты могут проявляться максимально. Это имеет место, если электронный пучок отклонен от направления точного выполнения многоволновой дифракции на угол $\theta_v \approx (2,0; 0,5)$ мрад вдоль направлений θ_1 и θ_2 , что соответствует максимуму в угловом распределении 2-волнового ПРИ.

Анализ угловых распределений 4-волнового ПРИ как функции угла θ_1 для различных значений угла θ_2 в интервале $\theta_2 = (-1,0 \div +1,0)$ мрад показал, что угловая ширина многоволновых пиков на два-три порядка меньше ширины углового распределения 2-волнового ПРИ. Учитывая, что угловое усреднение детектора в 4-волновом эксперименте много больше углового размера многоволновых пиков, можно сделать вывод, что многоволновая дифракция не может в данном случае внести существенный вклад в наблюдаемое угловое распределение.

Рассмотрение экспериментальной геометрии позволяет предположить, что асимметрия углового распределения, наблюдаемая в эксперименте, может быть

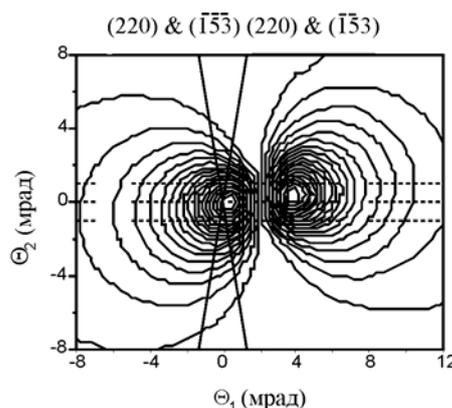


Рис. 4. Угловая диаграмма 4-волнового ПРИ

обусловлена отклонением экспериментальной плоскости сечения измерений от плоскости симметрии углового распределения 2-волнового ПРИ. Это приводит к тому, что при различных положениях детектора относительно угла θ_2 может наблюдаться асимметрия между пиками в угловом распределении 2-волнового ПРИ (см. рис. 4).

Анализ 8-волнового эксперимента

Анализ геометрии 8-волнового эксперимента показал, что, кроме восьми наиболее сильно возбуждаемых волн, в этом эксперименте условия Брэгга выполняются для отражений еще на четырех плоскостях: (422) , $(4\bar{2}\bar{2})$, (242) , $(2\bar{4}\bar{2})$. Однако амплитуды этих волн малы, поэтому при расчете они не учитывались. При анализе 8-волнового эксперимента, аналогично 4-волновому, предполагалось, что электронный пучок отклонен от направления точного выполнения условия 8-волновой дифракции и совпадает с одним из максимумов в 2-волновом угловом распределении ПРИ.

На рис. 5 соответствующие плоскости дифракции показаны линиями, точка их пересечения $\theta_1 = \theta_2 = 0$ соответствует точному выполнению условий 8-волновой дифракции. Вдали от указанной точки угловое распределение ПРИ формируется только 2-волновой дифракцией (400). Таким образом, вклад 8-волновой дифракции можно ожидать только в окрестности точки пересечения.

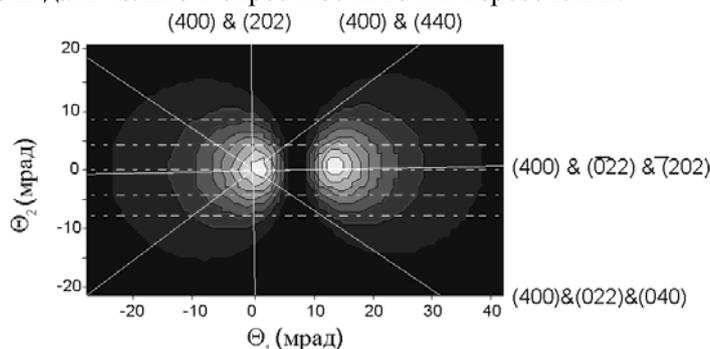


Рис. 5. Угловая диаграмма 8-волнового ПРИ

(8-волновое ПРИ)

$$\Theta_v = (4, -6) \text{ мрад}$$

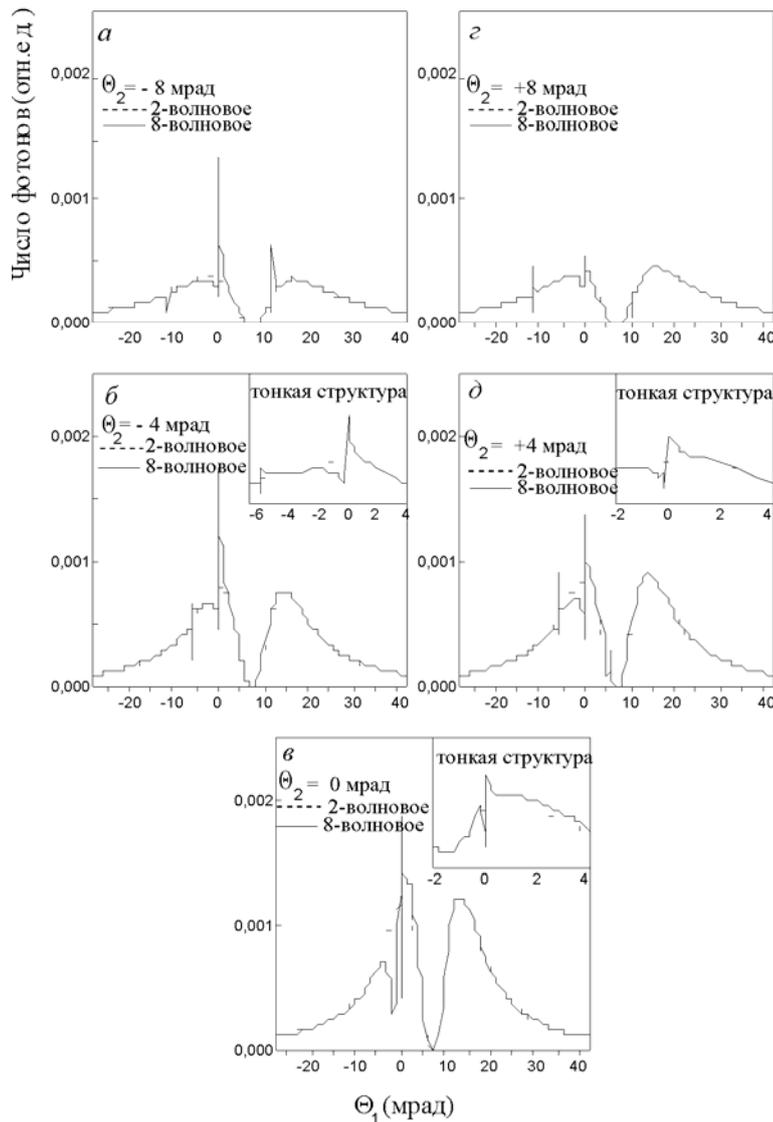


Рис. 6. Поперечные сечения углового распределения 8-волновой ПРИ для нескольких значений угла

На рис. 6 представлены сечения углового распределения ПРИ вдоль пунктирных линий, указанных на рис. 5. Очевидно, что многоволновые эффекты в этом случае проявляются значительно сильнее, чем в рассмотренном выше 4-волновом эксперименте. В частности, угловая ширина многоволновых пиков в данной геометрии на порядок больше. Кроме того, пики имеют широкие крылья, угловые размеры которых сравнимы с угловым размером 2-волнового распределения. В результате интегральный вклад многоволновых эффектов в 8-волновом

случае много больше, чем в 4-волновом, и хорошо может наблюдаться в условиях эксперимента. Увеличение угловых размеров многоволновых пиков является следствием уменьшения брэгговской частоты. Хорошо известно из динамической теории дифракции, что полуширина брэгговского пика пропорциональна диэлектрической восприимчивости кристалла, которая, в свою очередь, уменьшается как квадрат частоты. Следовательно, так как частота в 8-волновом эксперименте в три раза меньше брэгговской частоты для 4-волнового эксперимента, параметр χ_h возрастает почти на порядок. Более того, появление широких крыльев, связанных с асимметричной геометрией дифракции на плоскостях (202) и $(20\bar{2})$, формирует асимметрию наблюдаемого распределения. Анализ распределения (рис. 6) позволяет сделать вывод, что увеличение спектральной плотности излучения в центре углового распределения обусловлено в первую очередь вкладом 3-волновой дифракции на плоскостях (400) и (202) при $\theta_1 = 0$.

Вклад остальных линий менее выражен, и после усреднения по угловому размеру детектора они достаточно слабо изменяют угловое распределение ПРИ.

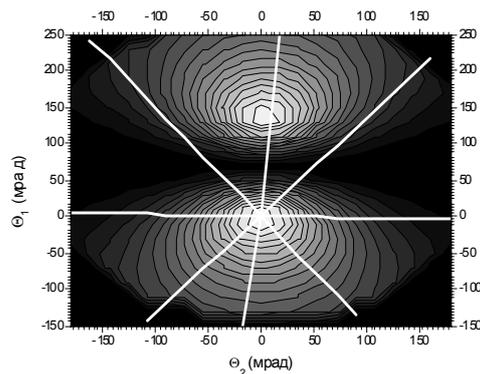
Интересно отметить, что многоволновая область имеет, в свою очередь, тонкую структуру, которая показана на рис. 6. Видно, что область 8-волновой дифракции имеет узкий провал в центре кривой. Это обстоятельство может быть причиной наблюдаемого на эксперименте расщепления в угловом распределении. Таким образом, угловое распределение ПРИ в условиях 8-волновой дифракции обладает сложной структурой.

Как указывалось выше, угловая область многоволновых эффектов много меньше, чем угловой размер 2-волнового ПРИ. Это приводит к сильной зависимости многоволновых вкладов от положения точки точного выполнения условия многоволновой дифракции относительно максимума в 2-волновом распределении ПРИ и, следовательно, относительно направления падения релятивистского излучающего пучка. В результате многоволновые эффекты могут вносить вклад только в один из двух максимумов в 2-волновом распределении ПРИ. Второй максимум будет всегда формироваться только 2-волновой дифракцией. Это приводит к асимметрии углового распределения ПРИ в соответствии с экспериментальными результатами. Очевидно, такая асимметрия не будет наблюдаться, если центр электронного пучка будет совпадать с точным условием многоволновой дифракции.

Нет сомнения в том, что аномалии в угловом распределении, наблюдаемые на эксперименте, в случае 8-волновой дифракции являются следствием вкладов многоволновой дифракции. Таким образом, качественное сравнение численно рассчитанных кривых с экспериментальными результатами показывает хорошее согласие. Более того, полученные результаты подтверждают возможность увеличения спектральной плотности ПРИ в узком угловом интервале благодаря многоволновой дифракции.

ПРИ для низкоэнергетичных электронов

В отличие от обычного черенковского излучения, которое имеет четко выраженный пороговый характер, генерация ПРИ возможна электронами невысоких



энергий вследствие плавной пороговой зависимости. Проявление в этом случае многоволновых эффектов в низкоэнергетической области было проанализировано для ПРИ, генерируемого электронами с энергией 7 МэВ в условиях 8-волновой дифракции, описанной выше. В этом случае угловая ширина ПРИ сильно возрастает и максимумы 2-волнового ПРИ наблюдаются на углах $\theta_v = (38,5, -55,5)$ мрад, а эффективный угол излучения, определяющий угловую ширину 2-волновых пиков, становится равным $\theta_{ef} = (\gamma^{-2} + |\chi_h| + \theta_s^2) = 1,28 \cdot 10^{-2}$ рад при среднеквадратичном угле многократного рассеяния $\theta_s^2 = 7,8$ мрад² ($\theta_s = 88$ мрад) (см. рис. 7).

Очевидно, что теперь угловая ширина 2-волнового ПРИ значительно превышает угловую область многоволновой дифракции, следовательно, существенно уменьшается зависимость многоволновых эффектов от ориентации пучка электронов относительно направления точного выполнения условий многоволновой дифракции. Так как черенковское условие при низких энергиях выполняется при больших отклонениях от условий даже 2-волновой дифракции, это существенно уменьшает интенсивность черенковского пика и, следовательно, его вклад в интенсивность ПРИ. С другой стороны, повышается вклад резонансной функции, соответствующей дифракционной амплитуде и имеющей максимум при $\alpha = 0$ (см. выражение (2)).

При низких энергиях существенное влияние на проявление многоволновых эффектов может оказать многократное рассеяние электронов в кристаллической мишени, так как угол многократного рассеяния $\theta_s = \sqrt{\overline{\theta_s^2}}$ при этих энергиях много больше размера угловой области проявления многоволновых эффектов $\theta_s > |\chi_\tau|$.

Так как результатом рассеяния электронов является отклонение их от первоначального направления и уширение начального пучка, то для оценки влияния многократного рассеяния на многоволновые эффекты строгий учет процесса рассеяния можно заменить усреднением выражения (2) по двумерному распределению скоростей электрона. Распределение выбиралось в виде гауссовской кривой с центром, лежащим на одном из максимумов 2-волнового ПРИ (см. рис. 7), т. е. при $\theta_1 = \theta_2 = 0$, которое соответствует направлению точного выполнения условий 8-волновой дифракции.

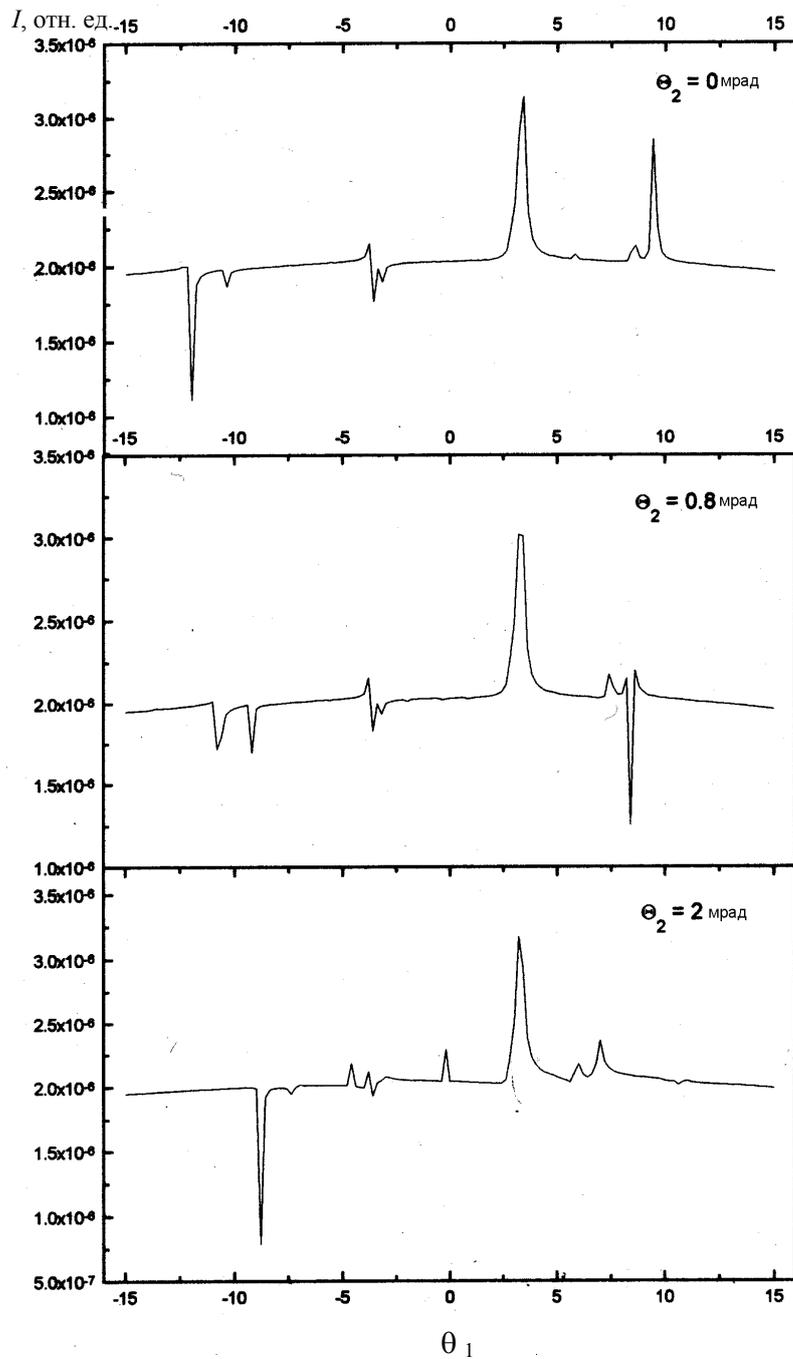


Рис. 8. Сечение углового распределения ПРИ для различных углов θ_2 в центре 2-волнового излучения, т. е. $\Psi_x = \mathcal{G}_{ix}$, $\Psi_y = \mathcal{G}_{iy}$

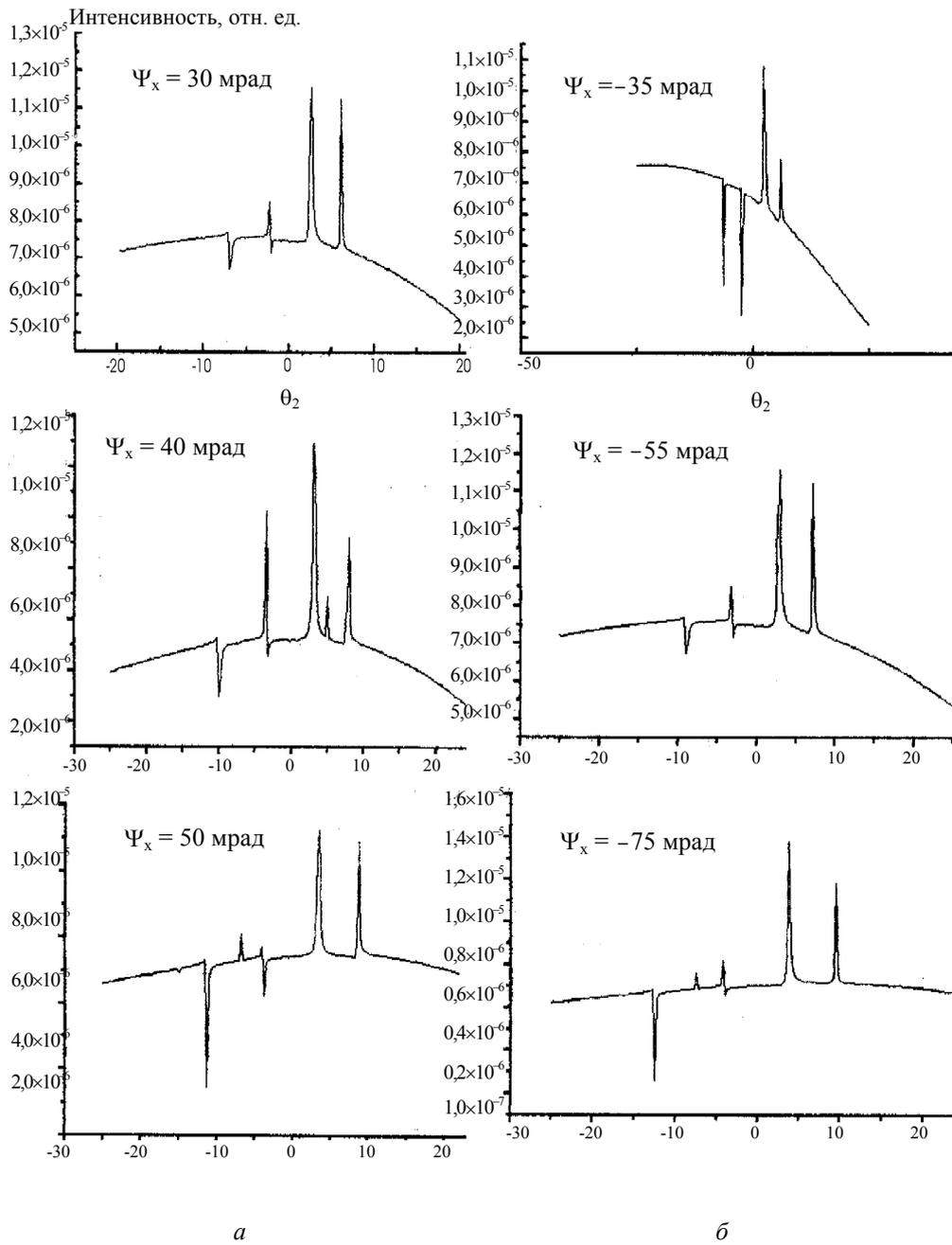


Рис. 9. Сечение углового распределения 8-волнового ПРИ при $\theta_2 = 0,8$ мрад для различных углов падения излучающей частицы:
a – при фиксированном угле $\Psi_x = 30$ мрад изменяется угол Ψ_y ;
б – при фиксированном угле $\Psi_y = -55$ мрад меняется значение угла Ψ_x

$$f(\Psi_x, \Psi_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_s^2}} \exp\left(-\frac{(\Psi_x - \mathcal{G}_x)^2}{\theta_{sx}^2}\right) \exp\left(-\frac{(\Psi_y - \mathcal{G}_y)^2}{\theta_{sy}^2}\right).$$

Усреднение углового распределения ПРИ по двумерному распределению скоростей электрона требует слишком много машинного времени, поэтому, оценивая влияния многократного рассеяния, были выполнены расчеты для выборочных значений углов отклонения Ψ_x, Ψ_y . Результаты расчетов сечений угловых распределений, аналогичных рассчитанным для электронов с энергией 900 МэВ, для двух линий вдухмерной сетки показаны на рис. 8.

Из рис. 8 видно, что на фоне широкого 2-волнового ПРИ в условиях многоволновой дифракции появляется ряд узких максимумов и минимумов, ширина которых 0,2–0,8 мрад, а высота в 1,5–2 раза превышает 2-волновое распределение.

На рис. 9 показаны сечения углового распределения при $\theta_1 = 0,8$ мрад, но различных значениях угла падения излучающей частицы Ψ_x и Ψ_y .

Сравнение положения резонансов для различных углов отклонения электрона показывает, что положение резонансов вдоль направления θ_1 и θ_2 меняется при изменении углов Ψ_x и Ψ_y и только центральный пик сохраняет свое положение. В результате проведенных оценок можно сделать вывод, что даже если боковые резонансы, меняющие свое положение, могут исчезнуть при сложении угловых распределений для различных углов Ψ_x и Ψ_y , то, по крайней мере, центральный пик должен суммироваться. Таким образом, можно полагать, что и при низких энергиях электронов в условиях сильного многократного рассеяния, возможно наблюдение многоволновых вкладов в ПРИ.

Итак, сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными угловыми распределениями позволяет сделать вывод, что аномалии в угловом распределении 8-волнового ПРИ действительно вызваны многоволновыми вкладами. В то время как в случае 4-волнового ПРИ асимметрия углового распределения может быть результатом отклонения экспериментальной плоскости измерения. Расчет также показал, что, несмотря на сильное многократное рассеяние электронов при невысоких энергиях, многоволновые эффекты могут проявляться в угловом распределении ПРИ и при низких энергиях электронов и приводить к формированию узкого пика в центре 2-волнового распределения. Формирование узкого пика за счет многоволновой дифракции может быть важным для повышения спектрально-угловой плотности излучения. Следует отметить, что многоволновые вклады в угловое распределение ПРИ растут с уменьшением частоты излучения.

Литература

1. *Afanasenko V. P., Baryshevsky V. G. et al.* // Phys. Lett. 1989. Vol. 141A. P. 311–313.
2. *Афанасенко В. П., Барышевский В. Г. и др.* // Письма в ЖЭТФ. 1989. Т.15. С. 33–35.
3. *Барышевский В. Г.* Каналирование, излучение и реакции при высоких энергиях в кристаллах. Мн., 1981.
4. *Feranchuk I. D., Ivashin A. V.* // J. Phys. 1985. Vol. 46. P. 1981–1986.
5. *Truong Ba Ha, Dubovskaya I. Ya.* // Phys. Stat. Sol. (b). 1981. Vol. 155. P. 685–695.

6. Dubovskaya I. Ya., Truong Ba Ha, Le Tien Hai // Phys. Stat. Sol. (b). 1991. Vol. 165. P. 575–582.
7. Dubovskaya I. Ya. and Savchuk G. K. // Phys. Stat. Sol. (b). Vol. 156. P. 687–695.
8. Kohn // Phys. Stat. Sol. (a) 1979. Vol. 54. P. 375.
9. Пинскер З. Г. Рентгеновская кристаллооптика. М., 1982.
10. Dubovskaya I. Ya., Stepanov S. A., Silenko A. Ya., Uliyanenkoff A. P. // J. Phys.: Condens. Matter. 1993. Vol. 5. P. 7771–7784.
11. Stepanov S. A., Silenko A. Ya., Uliyanenkoff A. P., Dubovskaya I. Ya. // Nucl. Instr. Meth. 1996. Vol. B974. P. 1–16.
12. Степанов С. А., Силенко А. Я., Ульяненков А. П., Дубовская И. Я. // Поверхность. 1997. Т. 8. С. 61–64.

PARAMETRIC X-RAY RADIATION UNDER THE CONDITION OF MULTI-WAVE DIFFRACTION

I. Ya. Dubovskaya

Due to crystal symmetry the diffraction conditions can be fulfilled for several waves consequently, the multi-wave diffraction can manifest themselves in parametric X-ray radiation (PXR). Indeed, some anomalies in PXR angular distributions were observed in conducting the experiments on PXR generated by relativistic electrons in GaAs [1, 2]. The analysis has shown that 4- and 8-wave Bragg diffraction conditions, correspondingly, were fulfilled in these experiments. The specific features observed were supposed to be the manifestation of multi-wave generation of PXR. It gave impetus to theoretical research concerning multi-wave effects in PXR.

The angular distribution of parametric X-ray radiation produced by relativistic particles in crystal under the conditions of 4- and 8-wave Bragg diffraction were computed in [11] with the help of the method developed in [10]. The comparison of computations, where the multi-wave Bragg diffraction effects were taken into account and the experimental angular distributions observed, allowed to draw the following conclusions.

The asymmetry in the PXR angular distribution observed in the experiment cannot be explained by the influence of 4-wave diffraction. In this case the widths of the multi-wave peaks are so small that their contributions to the formation of the PXR angular distribution can be neglected. The asymmetry of the two peaks in the observed two-wave distribution can be attributed to the deflection of the symmetry plane of two-wave angular distribution from planes of experimental measurements.

There is no doubt that anomalies in the angular distribution observed in the 8-wave experiment could be caused by multiple Bragg diffraction effects. The comparison between experimental and calculated results shows their good qualitative agreement.

The angular distributions were not averaged over the angular spread of the electrons on the ground that this would have taken too much time for these calculations but the multiple scattering of electrons by atoms was not so strong at high relativistic energies.

The situation changes in the case of PXR generation by low energy electrons. With the contrary to relativistic energy the low energy electrons are affected by strong multiple scattering by crystal atoms. That is why the average of PXR angular distribution for such electrons over the angular spread becomes very important. The 8-wave PXR generation by 7-MeV electron beam has been analyzed. The comparison of the positions of fine-structure resonance's in PXR angular distribution for different directions of particle movement has shown that the central peak, at least, maintains its position and should be summarized under the average over the electron angular spread. So, the multi-wave diffraction manifestation can be observed in PXR generation by low-energy electrons as well.

It means, that there is the possibility of increasing the PXR spectral-angular density within the narrow angular interval using multiple diffraction in both cases. The contributions from the multi-wave effects increase with decreasing Bragg frequencies due to the corresponding broadening of multi-wave diffraction peaks in the PXR angular distribution.